

Промежуточная аттестация по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
административной контрольной работы
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

(технологический профиль)

подготовлен
краевым государственным автономным
нетиповым общеобразовательным учреждением
«КРАЕВОЙ ЦЕНТР ОБРАЗОВАНИЯ»

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов административной контрольной работы в 2022 г. следует иметь в виду, что задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольную работу, а лишь дают представление о структуре работы, количестве заданий, их форме и уровне сложности. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться в АКР-2022, описан в спецификации и соответствует кодификатору элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике.

Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.



В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на некоторые позиции контрольной работы. В реальных вариантах работы на каждую позицию будет предложено только одно задание.

Эти сведения позволят обучающимся выработать стратегию подготовки к АКР.

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 состоит из 6 заданий базового уровня сложности и 5 заданий повышенного уровня сложности с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Правильное решение каждого из заданий №№ 1 – 11 оценивается 1 баллом.

Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Правильное решение каждого из заданий №№ 12-15 оценивается 2 баллами. При выполнении заданий 12-15 требуется записать полное решение и ответ.

Общие критерии оценивания заданий второй части (№№12 – 15):

За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов.	2 балла
Недостаточное обоснование при верном ответе <i>или</i> Полное обоснование, но при этом неверный ответ из-за единственной вычислительной ошибки	1 балл
Правильный ответ при отсутствии обоснований решения	0 баллов

Максимальное количество баллов за выполнение всей работы – 19.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 105 мин.

Первая часть экзаменационной работы (задания №№1-11) рассчитана на 45 минут и выполняется в автоматическом тестовом режиме программы MyTest[Pro]. При выполнении заданий части 1 полученные ответы необходимо ввести в специальное поле тестовой программы, отведенное для ответа.

Вторая часть экзаменационной работы рассчитана на 60 минут. Решение заданий №№12-15 оформляется письменно на отдельном бланке, который прилагается к тесту и выдается каждому учащемуся. Правильность выполнения заданий №12-15 проверяется отдельно и количество баллов за него суммируется с результатами тестовой части.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1 – 11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в ПОЛЕ ДЛЯ ОТВЕТА программы тестирования MyTest[Pro]. Единицы измерения писать не нужно.

1 Решите уравнение $\log_x(3+2x)=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них
Ответ: _____

ИЛИ

Решите уравнение: $\sqrt{40+3x-x^2}=5-x$
 Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.
Ответ: _____

ИЛИ

Найдите корень уравнения $9^{5+2x} = 0,81 \cdot 10^{5+2x}$
Ответ: _____

ИЛИ

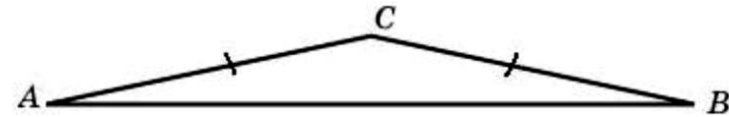
Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$.
 В ответе запишите наибольший отрицательный корень
Ответ: _____

2 Решите неравенство $(0,5)^{5x+3} \geq 4$. В ответе укажите наибольшее значение x , удовлетворяющее этому неравенству
Ответ: _____

ИЛИ

Решите неравенство $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$
 В ответе укажите наибольшее целое число, являющееся решением данного неравенства
Ответ: _____

3 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ: _____

ИЛИ

Найдите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} (рис. 1). Ответ дайте в градусах

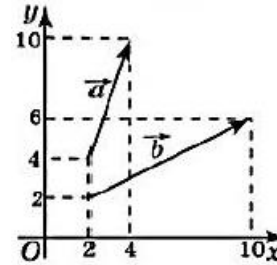


Рис. 1

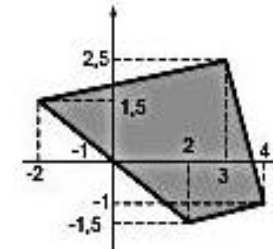


Рис. 2

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите площадь четырёхугольника (рис. 2), вершины которого имеют координаты $(-2; 1,5), (3; 2,5), (4; -1), (2; -1,5)$

Ответ: _____

ИЛИ

Три стороны описанного около окружности четырёхугольника (рис. 3) относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 32.

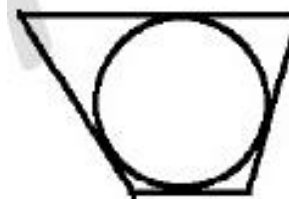


Рис. 3

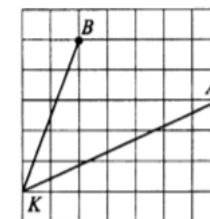


Рис. 4

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите тангенс угла ВКА (рис. 4).

Ответ: _____

4

Найдите значение выражения

$$\frac{4x - 9y}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}} - \sqrt{y}, \text{ если } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите $5 \sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите значение выражения

$$\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right) \left(5b + \frac{1}{b}\right).$$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите значение выражения $\frac{9^{3\sqrt{5}+1} \cdot 9^{4+\sqrt{5}}}{3^{8\sqrt{5}+4}}$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите значение выражения: $5^{\log_5 2} + 36^{\log_6 \sqrt{19}}$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите значение выражения $\frac{3 \cos(\pi - \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\beta + 3\pi)}$.

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 3$.

Ответ: _____

5

Основанием прямой треугольной призмы (рис. 5) служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы

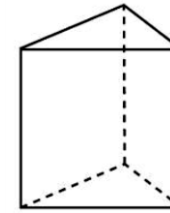


Рис. 5

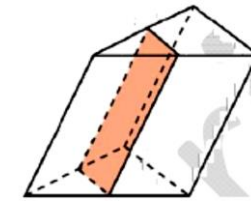


Рис. 6

Ответ: _____

ИЛИ

Через среднюю линию основания треугольной призмы (рис. 6), площадь боковой поверхности которой равна 24, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

Ответ: _____

ИЛИ

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{111}$. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда, если его ребра относятся как 3:4:7.

Ответ: _____

ИЛИ

Ребра тетраэдра (рис. 7) равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его ребер.

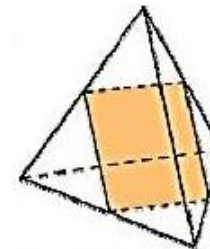


Рис. 7

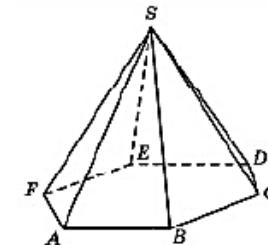


Рис. 8

Ответ: _____

ИЛИ

Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды (рис. 8) равно 12 и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите сторону основания пирамиды.

Ответ: _____

6

Найдите область определения функции

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\log_2(x-2)}$$

В ответе укажите наибольшее целое число из области определения

Ответ: _____

ИЛИ

Укажите вид четности заданной функции

$$f(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} - x)$$

Ответ: _____

ИЛИ

Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 5.

На промежутке $[-4;1)$ она задается формулой $f(x) = 1 + x^3 - 3x^2$.

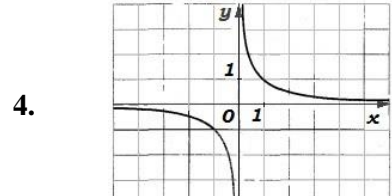
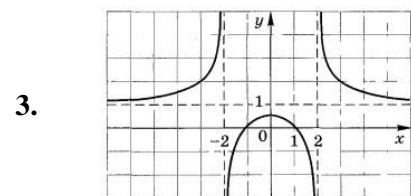
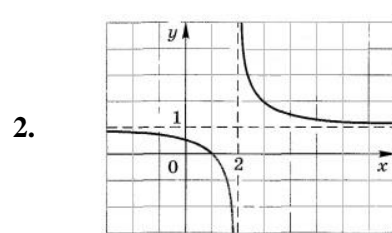
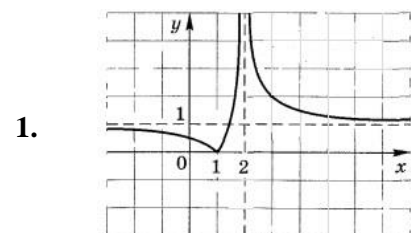
Найдите значение выражения $\frac{1}{4} \cdot f(15) - f(9) + 3$.

Ответ: _____

ИЛИ

Установите соответствие между функцией и ее графиком

А	Б	В	Г
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$	$f(x) = \left \frac{1}{x-2} + 1 \right $	$f(x) = \frac{1}{ x-2} + 1$



Ответ:

А	Б	В	Г

ИЛИ

На рисунке (рис. 9) изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;3)$. Найдите количество точек на интервале $(-3;3)$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -2$

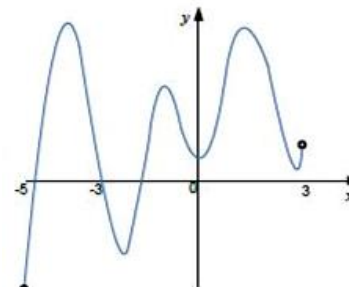


Рис. 9.

Ответ: _____

7

Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле

$$P = \frac{4mg}{\pi D^2}, \text{ где } m=1200 \text{ кг – общая масса навеса и колонны, } D –$$

диаметр колонны (в метрах). Считая, что ускорение свободного падения $g=10 \text{ м/с}^2$, а $\pi=3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па . Ответ выразите в метрах

Ответ: _____

ИЛИ

В12 Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5 \text{ м/с}$, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F была не менее чем $2 \cdot 10^{-8} \text{ Н}$? Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____

8 Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси

Ответ: _____

ИЛИ

Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон — 42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях

Ответ: _____

ИЛИ

Маша и Даша за день могут прополоть 3 грядки, Даша и Глаша — 4 грядки, а Глаша и Маша — 5 грядок. Спрашивается, сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроем

Ответ: _____

ИЛИ

Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы. Спустя один час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошел первый круг 5 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 2 км/ч меньше скорости второго. Ответ дайте в км/ч

Ответ: _____

ИЛИ

Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 14 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 3 часа после этого догнал первого.

Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

ИЛИ

На изготовление 80 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 90 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: _____

ИЛИ

По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 160 метров, второй — длиной 90 метров. Сначала второй сухогруз отстаёт от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 9 минут после этого уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 700 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Ответ: _____

9

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx - c$, где a , b и c — целые. Найдите $f(6)$



Рис. 10

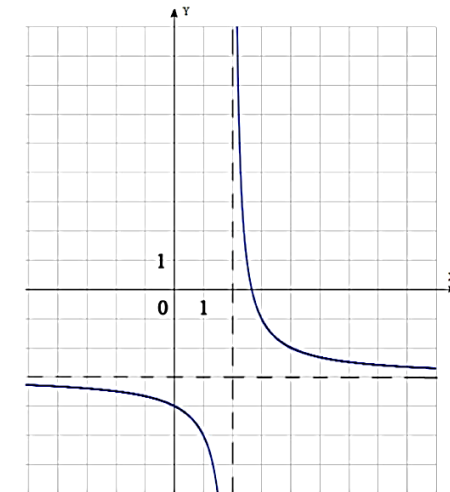


Рис. 11

Ответ: _____

ИЛИ

На рисунке (рис. 11) изображён график функции вида $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, где a , b и c — целые. Найдите $f(-14)$

Ответ: _____

ИЛИ

На рисунке (рис. 12) изображён график функции вида $f(x) = \sqrt{ax + b} + c$, где a, b и c – целые. Найдите $f(-895)$

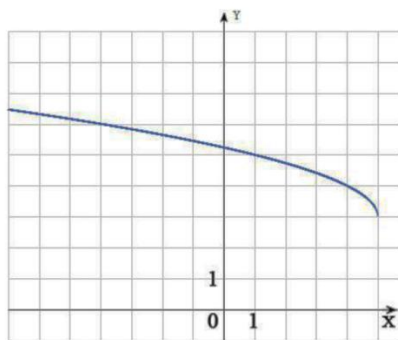


Рис. 12

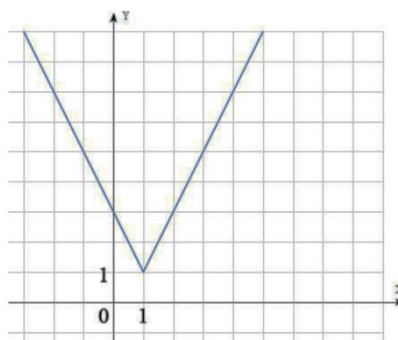


Рис. 13

Ответ: _____

ИЛИ

На рисунке (рис. 13) изображён график функции вида $f(x) = |ax + b| + c$, где a, b и c – целые. Найдите $f(88)$

Ответ: _____

10

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным

Ответ: _____

ИЛИ

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года

Ответ: _____

ИЛИ

В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Ответ: _____

ИЛИ

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода

Ответ: _____

ИЛИ

На рисунке (рис. 14) изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу

D

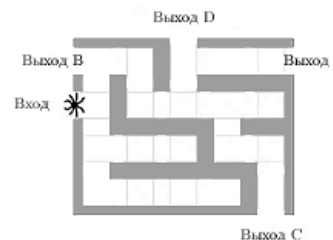


Рис. 14

Ответ: _____

ИЛИ

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Ответ: _____

ИЛИ

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет не менее двух раз

Ответ: _____

ИЛИ

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____

11 Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 12) + 2$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите наибольшее значение функции $y = 11^{6x - x^2 - 7}$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = \frac{7}{3} \sqrt{4 \sin^2 x + 4 \sin x + 8}.$$

Ответ: _____

ИЛИ

Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \cos\left(\frac{\pi}{6} + t\right)$,
если $t \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____

Не забудьте перенести все ответы в поле тестовой программы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12 – 15 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ**. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12

а) Решите уравнение $2 \cos 2x + 8 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$$

ИЛИ

а) Решите уравнение

$$7 \cdot 9^{x^2 - 3x + 1} + 5 \cdot 6^{x^2 - 3x + 1} - 48 \cdot 4^{x^2 - 3x} = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$[-1; 2]$$

13

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Через прямую AB проведено сечение, перпендикулярное ребру SC , площадь которого равна 18. Найдите длину бокового ребра пирамиды

ИЛИ

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB = 6$, $AD = 8$, $CC_1 = 16$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

14

Решите неравенство

$$\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0$$

ИЛИ

Решите неравенство

$$\frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0$$

15

Найдите все значения b , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 3x}{|x|} = b \text{ имеет ровно три корня}$$

ИЛИ

Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2x - 4 - |x^2 + x - 2| = a \text{ имеет ровно два корня}$$

Ответы и критерии оценивания

Каждое из заданий 1 – 11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

	Пр.1	Пр.2	Пр.3	Пр.4	Пр.5	Пр.6	Пр.7	Пр.8
1.	3	-1	-1,5	-4	-	-	-	-
2.	-1	-1	-	-	-	-	-	-
3.	100	45	13,25	12	1	-	-	-
4.	14	-1	1	729	21	2	8	-
5.	10	12	183	0,25	6	-	-	-
6.	4	ОВ	6,25	4213	5	-	-	-
7.	0,2	30	-	-	-	-	-	-
8.	60	530000	6	10	21	9	9	-
9.	124	-3,125	33	175	-	-	-	-
10.	0,019	0,08	0,48	0,392	0,0625	0,375	0,5	0,14
11.	3	3	121	9	3	-	-	-

Решения и критерии оценивания заданий 12 – 15

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12-15, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: **решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены.**

Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. **За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов. Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.**

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

12.1

а) Решите уравнение $2\cos 2x + 8\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Решение:

а) Используя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и формулу приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$, преобразуем исходное уравнение к виду:

$$4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0; (2\sin x + 1)(2\sin x - 5) = 0.$$

Отсюда $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{5}{2}$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = \frac{5}{2}$ корней не имеет, так как $\frac{5}{2} > 1$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 27) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

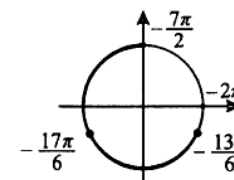


Рис. 27

Получим числа $-\frac{17\pi}{6}$ и $-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

12.2 $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0.$

а) Решите уравнение
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2 + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = -\frac{12}{7}. \end{cases}$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 3x + 1 = 0$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2 < \sqrt{5} < 3$. Тогда

$$\frac{5}{2} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}.$$

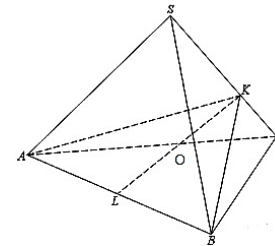
Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

13.1 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Через прямую AB проведено сечение, перпендикулярное ребру SC , площадь которого равна 18. Найти длину бокового ребра пирамиды

Решение:



1) Для того, чтобы построить сечение через прямую AB и перпендикулярно SC , нам необходимо опустить перпендикуляры из точек A и B на SC , их общая точка куда попадут перпендикуляры K (из равенства боковых плоскостей следует, что высоты этих треугольников попадут в одну точку). Искомое сечение AKB

2) Опустим в треугольнике AKB высоту KL из вершины K , она будет и медианой и биссектрисой, потому что треугольник равнобедренный ($AK=KB$)

3) Зная площадь сечения, найдем KL .

$$\frac{1}{2} KL \cdot AB = S \Rightarrow KL = 2 \frac{S}{AB} \Rightarrow KL = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

4) По формуле медианы равностороннего треугольника, найдем LC .

$$LC = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$$

5) Треугольник KLC прямоугольный с прямым углом K (из построения). Найдем $\sin \angle KCL$.

$$\sin \angle KCL = \frac{KL}{LC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle KCL = 60^\circ \Rightarrow \angle KLC = 30^\circ$$

б) По свойству медианы

$$CO = \frac{2}{3} \cdot CL$$

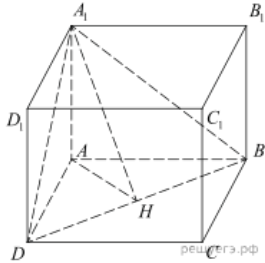
7) По свойству прямоугольного треугольника CSO ($\angle CSO = 30^\circ$):
 $SC = 2CO = 8$

Ответ: $SC = 8$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная либо логическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

13.2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: $AB = 6, AD = 8, CC_1 = 16$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

Решение.



Плоскости ABC и $A_1 DB$ имеют общую прямую BD . Проведем перпендикуляр AH к BD .

По теореме о трех перпендикулярах $A_1 H \perp BD$.

Значит, линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и $A_1 DB$, — это угол $A_1 HA$.

Из прямоугольного треугольника BAD находим:

$$AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника $A_1 AH$ находим:

$$\operatorname{tg} \angle A_1 HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{16 \cdot 5}{24} = \frac{10}{3}. \text{ Значит, искомый угол равен } \operatorname{arctg} \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{10}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14.1 Решите неравенство $\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0.5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0$

Решение:

Пусть $t = \log_2(16 + 6x - x^2)$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 10t + 24 > 0; (t - 4)(t - 6) > 0,$$

откуда $t < 4; t > 6$.

При $t < 4$ получим: $\log_2(16 + 6x - x^2) < 4; 0 < 16 + 6x - x^2 < 16; 0 < x^2 - 6x < 16$, откуда $-2 < x < 0; 6 < x < 8$.

При $t > 6$ получим: $\log_2(16 + 6x - x^2) > 6; 16 + 6x - x^2 > 64; x^2 - 6x + 48 < 0$; решений нет.

Решение исходного неравенства: $-2 < x < 0; 6 < x < 8$.

Ответ: $(-2; 0); (6; 8)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением точек 0 и/или 6, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14.2 Решите неравенство $\frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0$.

Решение. Обозначим 5^x за t . Получим:

$$\frac{t}{t - 4} + \frac{t + 5}{t - 5} + \frac{22}{t^2 - 9t + 20} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t(t - 5) + (t + 5)(t - 4) + 22}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2 - 4t + 2}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t - 1)^2}{(t - 4)(t - 5)} \leq 0 \begin{cases} t = 1, \\ 4 < t < 5. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$5^x = 1, \text{ или } 4 < 5^x < 5, \text{ откуда } x = 0 \text{ или } \log_5 4 < x < 1.$$

Ответ: $\{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15.1 Найдите все значения b , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 3x}{|x|} = b \quad \text{имеет ровно три корня}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 3x}{|x|}$. Она

определена для всех $x \neq 0$. Для $x > 0$ функцию $y = f(x)$ можно задать формулой $y = x^2 - 6x + 3$. Графику функции $f(x)$ принадлежат лишь те точки параболы $y = x^2 - 6x + 3$ с вершиной $(3; -6)$, для которых $x > 0$. Для $x < 0$ функцию $y = f(x)$ можно задать формулой $y = -x^2 + 6x - 3$. Графику функции $y = f(x)$ принадлежат лишь те точки параболы $y = -x^2 + 6x - 3$ с вершиной $(3; 6)$, для которых $x < 0$ (эта парабола симметрична параболе $y = x^2 - 6x + 3$ относительно оси Ox).

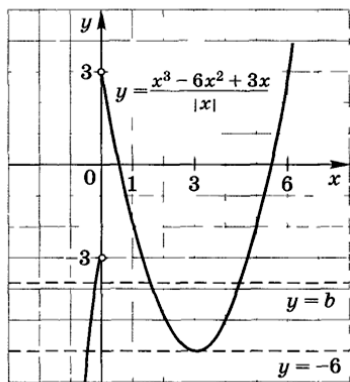


График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке

Уравнение (1) имеет ровно три корня только в том случае, когда прямая $y = b$ пересекает график функции $y = f(x)$ ровно в трех точках, т. е. только при $b \in (-6; -3)$.

Ответ. $b \in (-6; -3)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная или логическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15.2 Найдите все значения a при каждом из которых уравнение $x^2 - 2x - 4 - |x^2 + x - 2| = a$ имеет ровно два корня

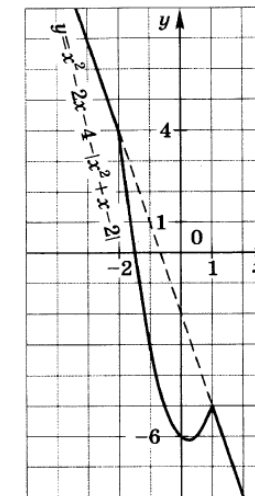


Рис. 20

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2x - 4 - |x^2 + x - 2|$. Она определена для всех $x \in \mathbb{R}$. Так как квадратный трехчлен $x^2 + x - 2$ равен нулю и при $x = 1$, и при $x = -2$, то для построения графика функции $y = f(x)$ рассмотрим два случая.

На промежутках $(-\infty; -2]$ и $[1; +\infty)$ функцию $y = f(x)$ можно задать формулой $y = -3x - 2$. На каждом из этих промежутков график функции $y = f(x)$ — часть прямой $y = -3x - 2$. Причем $f(-2) = 4$, $f(1) = -5$.

На промежутке $[-2; 1]$ функцию можно задать формулой $y = 2x^2 - x - 6$. На этом промежутке

график функции $y = f(x)$ — часть параболы с вершиной $(\frac{1}{4}; -6\frac{1}{8})$. Причем $f(-2) = 4$, $f(1) = -5$.

Для всех x график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 20.

Уравнение (2) имеет ровно два корня только в том случае, когда прямая $y = b$ пересекает график функции $y = f(x)$ ровно в двух точках, т. е. только при $b = -5$ или при $b = -6\frac{1}{8}$.

Ответ. $b = -5$ и $b = -6\frac{1}{8}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная или логическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2