

Класс 9.5 (гуманитарный профиль)

Учебник: Алгебра (Дорофеев Г.В.)
2019-2020 гг.

Тема модуля: «Рациональные уравнения и системы уравнений»

Основные теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения теста:

1. Понятие рационального выражения.
2. Понятия целого и дробного рационального выражения.
3. Область определения выражения.
4. Тождество. Схема доказательства тождеств.
5. Понятия целого и дробного уравнения. Степень уравнения.
6. Приёмы решения целых рациональных уравнений: разложение на множители и введение новой переменной.
7. Алгоритм решения дробного рационального уравнения.
8. Графический метод решения систем уравнений. Уравнения, определяющие прямую, параболу, гиперболу, окружность и др.
9. Методы подстановки и сложения при решении систем уравнений.

В процессе изучения данного модуля ученик

научится:

1. выделять среди рациональных выражений целые и дробные;
2. находить область определения рациональных выражений;
3. находить значения рациональных выражений при заданных значениях переменных;
4. преобразовывать целое выражение в многочлен стандартного вида, используя правила сложения, вычитания и умножения многочленов, в том числе формулы сокращённого умножения и наоборот;
5. упрощать дробные рациональные выражения, выполняя сложение, вычитание, умножение и деление рациональных выражений;
6. выполнять простейшие доказательства тождеств;
7. узнавать и различать целые и дробные уравнения;
8. оперировать понятиями "корень уравнения", "решение уравнения"; решать простейшие уравнения первой и второй степени;
9. применять метод разложения на множители при решении целых уравнений степени выше второй;
10. применять метод замены переменной при решении целых уравнений;
11. применять алгоритм решения дробных рациональных уравнений при их решении;
12. оперировать понятиями "система уравнений", "решение системы уравнений"; понимать геометрический смысл решения системы уравнений;

13. определять уравнения, задающие прямую линию, параболу, гиперболу, окружность; определять число решений уравнений и систем уравнений, используя графический метод;
14. решать простейшие системы двух линейных уравнений с двумя переменными методами подстановки и сложения;
15. решать простейшие системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными методом подстановки;
16. находить точки пересечения линий, задающихся известными уравнениями посредством решения систем этих уравнений.

получит возможность научиться:

1. выполнять многошаговые тождественные преобразования рациональных выражений на основе правил действий над многочленами и дробными выражениями;
2. решать текстовые задачи алгебраическим методом;
3. решать графическим методом уравнения и системы уравнений, содержащих модуль и иррациональные выражения;
4. решать уравнения с параметром.

В тесте проверяются умения категории "ученик научится".

Примерные практические задания, согласно определённым умениям.

1. Выделять среди рациональных выражений целые и дробные.

1.1. Какие из следующих выражений являются целыми, а какие дробными?

а) $x^2 - 3$; б) $\frac{2}{x-3}$; в) $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1$; г) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$; д) $5a^2bc^3$.

1.2. Какое из данных выражений является целым?

а) $\frac{2a}{4-a}$; б) $\frac{a-4}{2a}$; в) $\frac{a-4}{2}$; г) $\frac{2}{a-4}$.

1.3. Какие из данных выражений являются дробными?

а) $\frac{5b}{3-b}$; б) $\frac{b-3}{5b}$; в) $\frac{b-3}{5}$; г) $\frac{5}{b-3}$.

1.4. Какое из выражений не является целым?

а) $a^2 + 5$; б) $a^2 + 5a$; в) $a^2 - \frac{5}{a}$; г) $a^2 - \frac{a}{5}$.

2. Находить область определения рациональных выражений.

2.1. Найдите область определения следующих рациональных выражений:

1) $x^2 + 3x - 5$; 5) $\frac{\frac{1}{x+2}-1}{3x-6}$. 9) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+3}$;

2) $\frac{a^2}{5} + 3a$; 6) $\frac{2}{x^2+9}$; 10) $\frac{5}{4-y} + \frac{6}{y+6}$;

3) $\frac{5b-4}{(b-5)(b+2)}$; 7) $2a^{-1} + 1$; 11) $\frac{a-3}{4-3a-a^2}$;

4) $0,5x^2 - 2x + 2$; 8) $\frac{z-4}{12z+3z^2}$; 12) $\frac{z^2-3}{z^2+3}$.

2.2. Какое из данных выражений имеет смысл при любых значениях переменной?

а) $\frac{2}{9-x^2}$; б) $\frac{2}{(9+x)^2}$; в) $\frac{2}{9+x^2}$; г) $\frac{2}{9x^2}$.

2.3. Какое из данных выражений не имеет смысла как при $x = 3$ так и при $x = -1$?

а) $\frac{x-1}{(x-3)(x+1)}$; б) $\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$; в) $\frac{x-1}{(x+3)(x+1)}$; г) $\frac{x+1}{(x-3)(x-1)}$.

2.4. Какое из данных выражений не имеет смысла только при $x = 3$?

а) $\frac{x-1}{x-3}$; б) $\frac{x+1}{x+3}$; в) $\frac{x-3}{x+1}$; г) $\frac{x+3}{x-1}$.

2.5. Какое из данных выражений не имеет смысла только при $x = -1$?

а) $\frac{x-1}{x-3}$; б) $\frac{x+1}{x+3}$; в) $\frac{x-3}{x+1}$; г) $\frac{x+3}{x-1}$.

2.6. Какие из данных выражений не имеют смысла при $x = 0$?

а) $\frac{x}{x+2}$; б) $\frac{x+2}{x}$; в) $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$.

3. Находить значения рациональных выражений при заданных значениях переменных.

3.1. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3a^2-a}{4}$ при $a = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{ab-1}{ab+1}$ при $a = -5, b = 0,4$;

в) $\frac{c+a}{c-a}$ при $a = 1,1$ и $c = -0,7$.

3.2. Заполните таблицу

a	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	4	100
$a^2 - 4$								

4. Преобразовывать целое выражение в многочлен стандартного вида, используя правила сложения, вычитания и умножения многочленов, в том числе формулы сокращённого умножения и наоборот (разложение на множители).

4.1. В выражении $27a^2 - 9ac$ вынесли за скобки общий множитель $-9a$. Какой двучлен остался в скобках?

4.2. Упростите выражение

б) $(3m - 2n)(3m + 2n) + (m - 3n)^2 - (5m - n)(2m - 5n)$;

в) $(3a - 5c)^2 + (2a + 9c)^2 - (2a + 3c)(27c - 16a)$.

4.3. Упростите выражение $(a - 1)(a + 1) - (a - 1)^2 - a$ и найдите его значение при $a = -0,5$.

5. Упрощать дробные рациональные выражения, выполняя сложение, вычитание, умножение и деление рациональных выражений.

5.1. Сократите дробь

а) $\frac{ab - a^2}{a^2 - b^2}$; б) $\frac{b^2 - c^2}{bc - b^2}$.

5.2. Упростите выражение

а) $\frac{2c^2}{a+c} : 6ac$; б) $\frac{10x^2}{x-y} : 5xy$.

5.3.

Упростите выражение $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$.

1) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ 2) 1 3) $\frac{x+y}{x-y}$ 4) -1

5.4.

Упростите выражение $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x}$.

1) $-\frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$ 2) -1 3) $\frac{y-x}{y+x}$ 4) 1

5.5. Упростите выражение

а) $\left(\frac{2}{b-a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} - a\right)$;

б) $\frac{(3a^2b^{-3})^4 \cdot (2a^{-5}b^2)}{27a^3b^{-11}}$;

в) $\frac{x^2-2x-3}{x+1} - \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$;

г) $\frac{a^2-1}{a^2} - \frac{a^2-9}{a} \cdot \frac{1}{a+3}$;

д) $\left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}\right) : \frac{4}{x^2-y^2}$.

5.6. Упростите выражение и найдите его значение

а) $\frac{xy+y^2}{15x} \cdot \frac{3x}{x+y}$ при $x = 24$ и $y = 2,5$;

б) $(x-5) : \frac{x^2-10x+25}{x+5}$ при $x = 25$.

6. Выполнять простейшие доказательства тождеств.

6.1.

Какое из выражений равно дроби $\frac{c-x}{b-y}$?

1) $\frac{x-c}{b-y}$ 2) $\frac{c-x}{y-b}$ 3) $-\frac{x-c}{b-y}$ 4) $-\frac{x-c}{y-b}$

6.2.

Какое из перечисленных равенств является тождеством?

1) $(a-c)(c-a) = a^2 - c^2$
2) $(a-c)(c-a) = 2ac$
3) $(a-c)(c-a) = -(c-a)^2$
4) $(a-c)(c-a) = (a-c)^2$

6.3.

Какое из равенств не является тождеством?

1) $a-b = -(b-a)$ 3) $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$
2) $(a-b)^2 = (b-a)^2$ 4) $(b+a)(a-b) = b^2 - a^2$

6.4.

Какая из дробей не равна выражению $\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{1}{2-x}$?

1) $\frac{1}{2x-x^2}$ 2) $\frac{2x-1}{x^2-2x}$ 3) $-\frac{1}{x(x-2)}$ 4) $\frac{1}{x(2-x)}$

6.5. Докажите верность тождества или опровергните его

а) $(b - x)(x - b) = b^2 - x^2$;

б) $(a - x)(x - a) = -(a - x)^2$;

в) $x(x - y) - y(x + y) = x^2 - y^2$;

г) $(x - 4)^2 = x^2 - 16$.

д) $(a^2 - 4)(a - 2)^{-1} - (a^2 - 6a + 9)(a - 3)^{-1} = 5$;

е) $\frac{(5-x)^2}{2x} \cdot \left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x}{(x-5)^2} \right) + \frac{5}{5+x} = 0$.

7. Узнавать и различать целые и дробные уравнения.

7.1. Какие из следующих уравнений являются целыми, а какие дробными?

а) $\frac{2}{x} + x = -2$;

г) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$;

б) $\frac{x^2}{2} - 3x = 0$;

д) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 3$;

в) $2x^2 = 3x + 7$;

е) $\frac{x^3+5x}{7} - \frac{x}{2} = 0$.

8. Оперировать понятиями "корень уравнения", "решение уравнения"; решать простейшие уравнения первой и второй степени.

8.1.

Поставьте в соответствие каждому уравнению множество его корней.

А) $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = 0$

Б) $\frac{x(x^2-1)}{x+1} = 0$

В) $\frac{x^2-1}{x(x+1)} = 0$

1) 1

2) 0

3) 0; 1

8.2. Найдите корни уравнения $2x(x + 2)(x - 3) = 0$.

8.3. Сколько корней имеет уравнение $x^4 - x^2 = 0$?

8.4.

Какое из уравнений имеет три корня?

1) $\frac{x^2+1}{x-1} = 0$

3) $\frac{x(x^2+4)}{x-1} = 0$

2) $\frac{x(x^2-1)}{x-1} = 0$

4) $\frac{x(x^2-4)}{x-1} = 0$

8.5. Решите уравнения

а) $2x - 9 = 3x + 16$;

д) $\frac{t-2}{4} = \frac{5-2t}{-4}$;

б) $\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} = 2$.

е) $\frac{x^2-8}{4} - x = \frac{x+1}{3} - 4$;

в) $3x^2 + x = 6x + 2$;

г) $3 - \frac{x}{7} = \frac{x}{3}$.

ж) $(2x - 1)(x + 2) - \frac{x}{2} = -2$.

з) $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} + x = -\frac{29}{6}$.

9. Применять метод разложения на множители при решении целых уравнений степени выше второй.

9.1. Решите уравнения

а) $x^3 - 9x = 0$;

б) $x^4 + 3x^2 = 0$;

в) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

г) $x^3 = x^2 - 7x + 7$;

д) $x^3 + 2x^2 = 0$;

е) $x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0$.

ж) $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$;

з) $(2x - 3)^2 = (1 - 2x)^2$.

10. Применять метод замены переменной при решении целых уравнений.

10.1. Решите биквадратные уравнения

а) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;

б) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$;

в) $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$.

г) $(x + 1)^4 + (x + 1)^2 - 6 = 0$.

11. Применять алгоритм решения дробных рациональных уравнений при их решении.

11.1. Решите уравнения

а) $\frac{3}{x+2} - 5 = \frac{4}{x-2}$;

б) $\frac{x-3}{x} + \frac{7}{x+3} = \frac{5}{4}$;

в) $x + \frac{4}{x} = 4$;

г) $\frac{x^2 - 7x - 8}{x+1} = 0$;

д) $\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} = 1$.

е) $\frac{x}{x-2} = \frac{10}{x+1}$;

ж) $\frac{1-x}{2-x} = 2$

з) $\frac{2x}{3-x} + \frac{6}{x-3} = x - 4$;

и) $\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2$.

к) $\frac{5x^2 + 2x - 24}{x-5} = 0$.

12. Оперировать понятиями "система уравнений", "решение системы уравнений", понимать геометрический смысл решения системы уравнений.

12.1. Какие из указанных пар чисел являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

а) (4; 1);

б) (6; -1);

в) (3; 2);

г) (-3; -2).

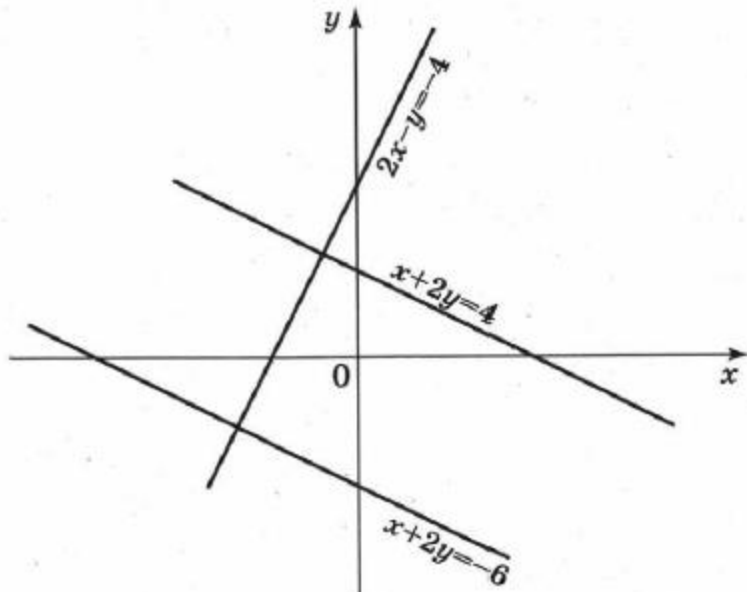
12.2. Какие из указанных чисел являются решением данной системы уравнений

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 3y) = 15 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

- а) $(-2,8; 5,8)$, $(3; 0)$. б) $(3,7; -0,7)$, $(5; -2)$. в) $(3,5; -0,5)$, $(2; 1)$.

12.3.

Используя уравнения прямых, изображённых на рисунке, составьте систему уравнений, решением которой является пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $x < 0, y > 0$.



1) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -6 \end{cases}$

4) такой системы нет

13. Определять уравнения, задающие прямую линию, параболу, гиперболу, окружность; определять число решений уравнений и систем уравнений, используя графический метод.

13.1. Поставить в соответствие каждому уравнению линию, которую оно задаёт.

- а) $4x^2 - 2x + 3 = y$; б) $x - 2y = 6$; в) $xy = 4$; г) $x^2 + y^2 = 9$;

- 1) прямая линия; 2) окружность; 3) парабола; 4) гипербола.

13.2. В одной системе координат изобразите графики двух данных уравнений. Сколько общих точек у этих графиков?

а) $7x - 9y = 63$ и $x - 9y = -18$;

г) $4x + y = x^2$ и $y = -4$;

б) $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 8x - 12$;

д) $xy = 8$ и $x^2 - 2x + y - 9 = 0$;

в) $x^2 + y^2 = 25$ и $xy = 6$;

е) $x^2 - y^2 = 0$ и $y - x = 5$.

13.3.

Поставьте в соответствие каждой системе уравнений число её решений.

А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$

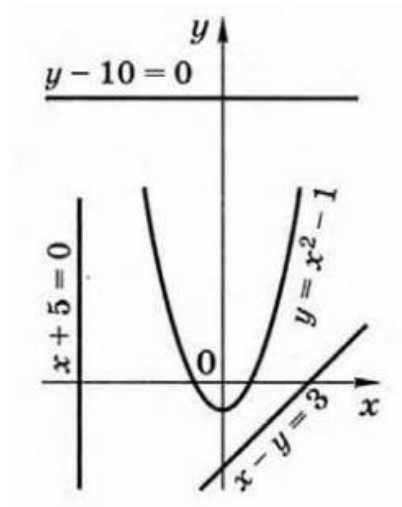
Б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$

В) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$

- 1) решений нет
- 2) одно решение
- 3) два решения
- 4) три решения

13.4.

На рисунке изображена парабола и три прямые. Запишите систему уравнений, содержащую пару уравнений с рисунка, которая не имеет решений.



13.5.

Для каждой системы уравнений укажите число её решений (используйте графические соображения).

А) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -5x \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 5 - x \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 5 \end{cases}$

- 1) 1 решение
- 2) 2 решения
- 3) 3 решения
- 4) нет решений

13.6.

Какой из систем уравнений соответствует рисунок 24?

А. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + y = 5. \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

В. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 6. \end{cases}$

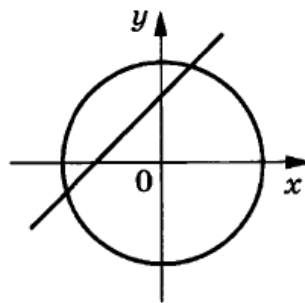


Рис. 24

13.7.

С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{x} = 4 - x^2$.

13.8. Используя графики, решите уравнение $x^3 = \frac{1}{x}$.

13.9. Решите систему уравнений графическим методом

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

14. Решать простейшие системы двух линейных уравнений с двумя переменными методами подстановки и сложения.

Решите системы линейных уравнений. В ответе к каждой системе запишите значения суммы и разности её решений.

а) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - y = -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} t - 5s = 0 \\ 2t - s = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x+z}{2} = 1 \\ x - z = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3m - 4n = 20 \\ m + 2n = 0; \end{cases}$

15. Решать простейшие системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными методом подстановки.

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x - y = 4. \end{cases}$

16. Находить точки пересечения линий, задающихся известными уравнениями посредством решения систем этих уравнений.

16.1. Вычислите точки пересечения прямых $2x - y = -4$ и $x + 2y = 4$ не выполняя построений.

16.2. Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = 2x^2 - 5$ и прямой $y = 4x - 5$.

16.3. Вычислите точки пересечения гиперболы $xy = 6$ и прямой $y = x - 1$.