**10.1 класс (тех)**

**2020-2021 уч.год**

# Банк заданий по математике для подготовки к тестированию (учебник Никольский С.М.)

## Тема модуля №12 «ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛЫ» ( 11 кл, Глава I, §§ 4, 5, 6)

***В тесте проверяются теоретическая и практическая части.***

*Основные теоретические сведения, необходимые для успешного изучения модуля:*

1. Понятие первообразной. Какую функцию называют первообразной для функции y = f(x) на интервале (a; b).
2. Свойства первообразных.
3. Формулы первообразных основных элементарных функций.
4. Неопределенный интеграл. Символика и обозначение неопределенного интеграла.
5. Понятие интегрирования функции как процесса.
6. Определенный интеграл. Символика и обозначение определенного интеграла.
7. Основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла.
8. Понятие и виды криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции.
9. Формула Ньютона - Лейбница.
10. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах.

*В процессе изучения темы ученик научится/получит возможность научиться:*

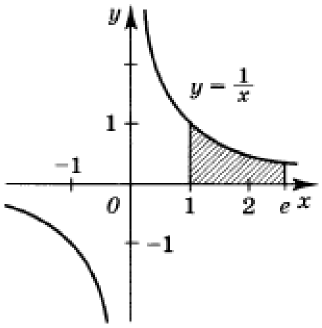
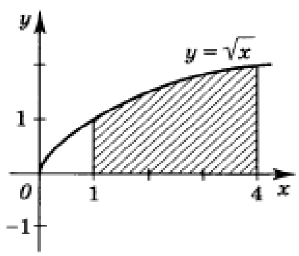
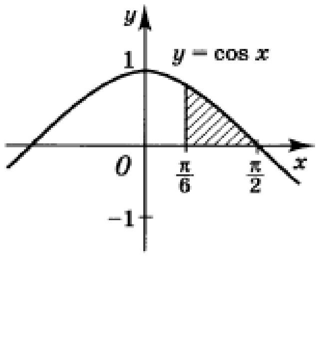
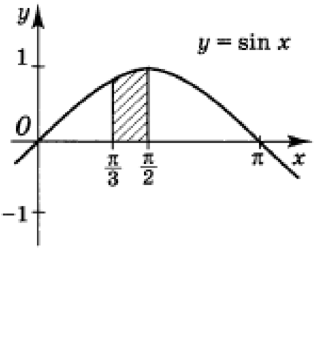
1. Находить первообразные и вычислять интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования.
2. Вычислять определенные интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования.
3. Использовать основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла при решении задач.
4. Узнавать и строить криволинейные трапеции, распознавать их виды.
5. Строить в координатной плоскости фигуры, ограниченные графиками функций.
6. Вычислять площади криволинейных трапеций, фигур, ограниченных графиками заданных функций с помощью определенного интеграла, формулы Ньютона-Лейбница.
7. Находить площадь круга, объем тел вращения, работу, массу стержня переменной плотности, работу электрического заряда, давление жидкости на стенку, центр тяжести с помощью определенных интегралов.
8. *Решать задачи с использованием первообразной и интеграла.*

***Примерный банк задач для подготовки к тестированию:***

| *№* | | *Элементы содержания задания* | *Ответ* |
|---|---|---|---|
| **Часть 1.** *(Каждое задание оценивается в 1 балл)* | | | |
| **1.** | Доказать, что функция F(x) является первообразной для функции f(x), если: | | |
| | 1. | $F(x)=3x^3+5x^2+\operatorname{tg}x-8$ и $f(x)=9x^2+10x+\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; | |
| | 2. | $F(x)=6x^5+\ln 6x$ и $f(x)=30x^4+\frac{1}{x},\ x>0$. | |
| | 3. | $F(x)=x^3+4x^2-5x+7$ и $f(x)=3x^2+8x-5,\ x\in R$; | |
| | 4. | $F(x)=2x^5+e^x$ и $f(x)=10x^4+e^x,\ x\in R$. | |
| | 5. | $F(x)=\frac{3x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-9x+15$ и $f(x)=3x^3+4x^2-9\ (x\in R)$; | |
| | 6. | $F(x)=\frac{3}{x^2}-5x-\sin x-10$ и $f(x)=-\frac{6}{x^3}-5-\cos x\ (x\neq 0)$. | |
| | 7. | $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4),\ f(x)=\frac{x}{x^2+4}$; | |
| **2.** | Укажите общий вид первообразных для функций: | | |

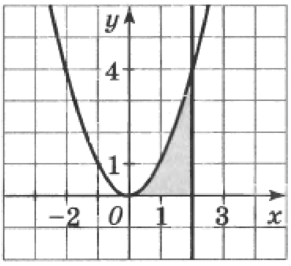
| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1. | $f(x) = x^4 + 3x.$<br>**1.** $F(x) = \frac{x^5}{5} + 6x^2$<br>**2.** $F(x) = 4x^3 + 3 + C$<br>**3.** $F(x) = 4x^3 + 3$<br>**4.** $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} + C$ | |
| | 2. | $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + \sqrt{3}.$<br>**1.** $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}$<br>**2.** $F(x) = 3x^2 + 6x - 2 + C$<br>**3.** $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + C$<br>**4.** $F(x) = 3x^2 + 6x - 2$ | |
| | 3. | **Найдите первообразную для функции** $f(x) = x + \cos x$.<br>**1.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$<br>**2.** $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$<br>**3.** $F(x) = x^2 + \cos x + C$<br>**4.** $F(x) = 2 - \cos x + C$ | |
| | 4. | **Найдите первообразную для функции** $f(x) = 3x^2 - \sin x$.<br>**1.** $F(x) = x^3 - \cos x + C$<br>**2.** $F(x) = 2x + \sin x + C$<br>**3.** $F(x) = x^3 + \cos x + C$<br>**4.** $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$ | |
| | 5. | **Найдите первообразную для функции** $f(x) = e^x - x^3$.<br>**1.** $F(x) = e^x - \frac{x^4}{4} + C$<br>**2.** $F(x) = e^x - 3x^2 + C$<br>**3.** $F(x) = e^{x-1} - 3e^2 + C$<br>**4.** $F(x) = e^x - x^4 + C$ | |
| | 6. | **Найдите первообразную для функции** $f(x) = e^x + 12$.<br>**1.** $F(x) = e^x + C$<br>**2.** $F(x) = e^{x-1} + C$<br>**3.** $F(x) = e^x + 12x + C$<br>**4.** $F(x) = e^x + 12 + C$ | |
| **3.** | Найдите общий вид первообразных и для заданной функции: | | |
| | 1. | $y = \frac{5}{x} + \sin x,\ x \neq 0$ | |
| | 2. | $y = 6\cos x$ | |
| | 3. | $y = \frac{7}{x^2},\ x \neq 0$ | |
| | 4. | $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ | |
| | 5. | $y = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x},\quad x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6. | $y=\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}-6^x,\ \ x\neq \pi n, n\in Z$ | |
| | 7. | $y=\sqrt{2x}-x^5+\frac{3}{x},\ \ x\neq 0$ | |
| | 8. | $y=\sqrt[5]{x}-2e^x$ | |
| | 9. | $y=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}},\ \ x\neq \pi n, n\in Z$ | |
| | 10 | $y=x^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4},\ \ x\rhd 0$ | |
| **4.** | Найдите общий вид первообразных для заданной функции: | | |
| | 1. | $y=e^{5x+2}$ | |
| | 2. | $y=\sin(4x-7)$ | |
| | 3. | $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ | |
| | 4. | $y=-\frac{1}{(6x+1)^2}$ | |
| | 5. | $y=\frac{1}{\sqrt{7x-9}}$ | |
| | 6. | $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ | |
| | 7. | $y=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ | |
| **5.** | Для функции $f(x)$найдите ту первообразную, которая проходит через точку $M(x;y)$ | | |
| | 1. | $f(x)=5e^x,\ M(0;14)$ | |
| | 2. | $f(x)=-9\cos x,\ M\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ | |
| | 3. | $f(x)=-4x^3+\frac{1}{x^2},\ M(1;2)$ | |
| **6.** | Найдите неопределенный интеграл: | | |
| | 1. | $\int\sqrt{2x-3}\,dx$ | |
| | 2. | $\int\cos 3x\,dx$ | |
| | 3. | $\int\frac{-10}{\sqrt{5x-4}}dx$ | |
| | 4. | $\int(\cos 2x-\sin 3x)dx$ | |
| | 5. | $\int\sqrt{6-5x}\,dx$ | |
| **7.** | Вычислить определенные интегралы: | | |
| | 1. | $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{-5x+6}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | 2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ | |
| | 3. $\int_{-1}^{2} x^4\, dx$ | |
| | 4. $\int_{2}^{8} 2dx$ | |
| | 5. $\int_{-8}^{0} \frac{3x}{4} dx$ | |
| | 6. $\int_{1}^{e} \frac{3dx}{x}$ | |
| | 7. $\int_{-1}^{4} \left(x^2 - x + 4\right)dx$ | |
| | 8. $\int_{1}^{2} x^2 dx + \int_{2}^{3} x^2 dx$ | |
| | 9. $\int_{1}^{\sqrt{5}} x^3\, dx + \int_{\sqrt{5}}^{3} x^3\, dx$ | |
| | 10 $\int_{0}^{1} \sin x\, dx + \int_{1}^{\pi} \sin x\, dx$ | |
| | 11 $\int_{0}^{1} \left((x-2)^3 + 3(x-1)^2\right)dx$ | |
| **8.** | Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры: | |
| |  1.  2. | |
| |  3.  4. | |

**9.** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. **Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = 2$.**



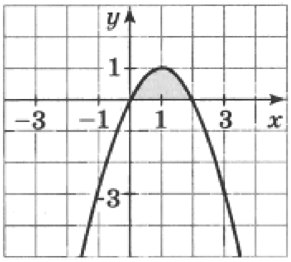

**1.** 2

**2.** $2\frac{2}{3}$

**3.** 4

**4.** $2\frac{1}{3}$

2. **Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.**



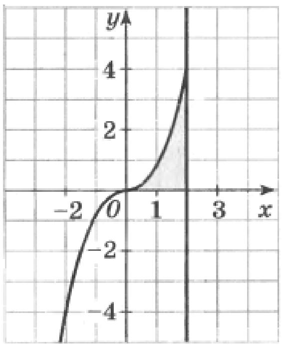

**1.** 1

**2.** $1\frac{2}{3}$

**3.** $1\frac{1}{3}$

**4.** $1\frac{1}{2}$

3. **Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0{,}5x^3$, $y = 0$ и $x = 2$.**



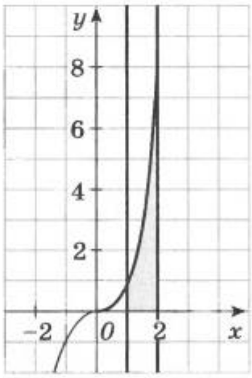

**1.** 2

**2.** 1,5

**3.** 2,5

**4.** 2,2

4. **Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.**



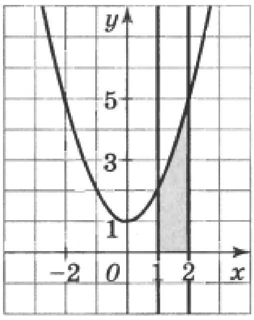

**1.** 4

**2.** $3\frac{3}{4}$

**3.** $4\frac{1}{4}$

**4.** $2\frac{1}{4}$

5. **Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.**




**1.** 3

**2.** $3\frac{2}{3}$

**3.** 3,5

**4.** $3\frac{1}{3}$

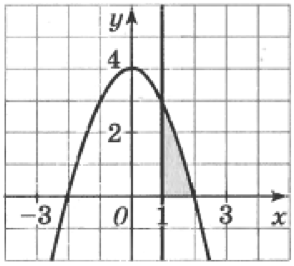
6. **Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$ и $x = 1$.**

**1.** $2\frac{1}{3}$

**2.** $1\frac{2}{3}$

**3.** $2\frac{2}{3}$

**4.** $1\frac{1}{3}$



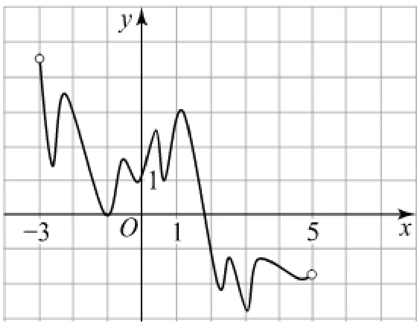

**10.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

| | |
|---|---|
| 1. | $y = \cos x,\ \ y = 0{,}5,\ \ x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$ |
| 2. | $y = x^2,\ \ y = 9$ |
| 3. | $y = -x^2 - 4x + 5,\ \ y = 5$ |
| 4. | $y = -x^2 + 4x,\ \ y = -x$ |
| 5. | $y = 4x^2,\ \ y = -12x$ |
| 6. | $\boldsymbol{y = x^2 - 6x + 11}$ **и** $\boldsymbol{y = x + 1}$ |
| 7. | $y = 5 - x^2,\ \ y = x + 3$ |
| 8. | $y = 4 + x^2,\ \ y = 2 - x,\ x = -1,\ x = 1$ |
| 9. | $y = x^3,\ \ y = 8,\ x = 1$ |

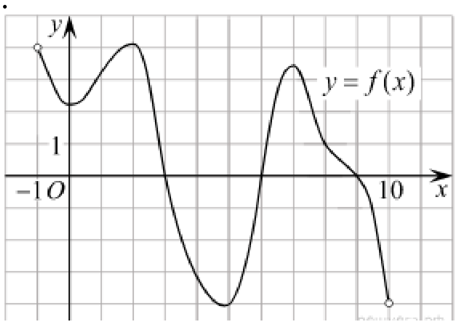
**11.** Найти первообразную для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, если $F(1) = 3$

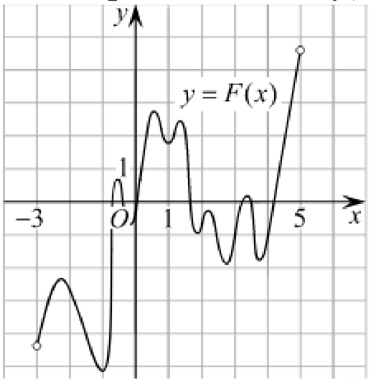
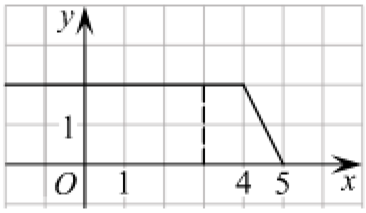
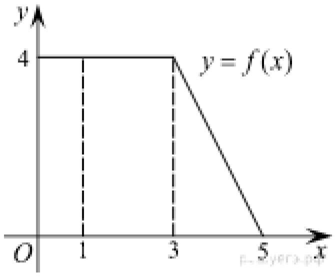
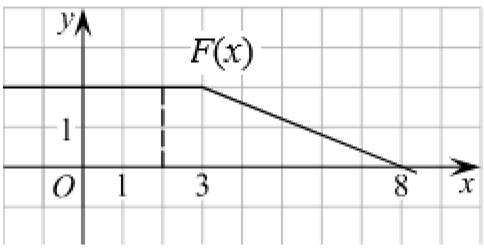
**12.** Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, если $F(3) = \ln(3e)$

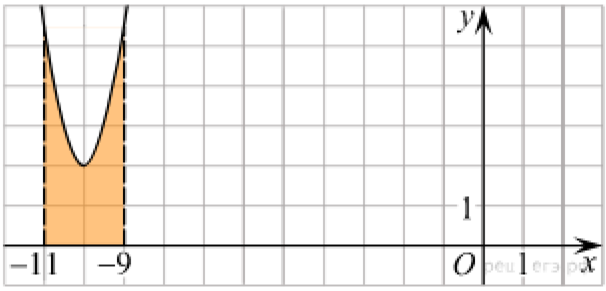
**13.** На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



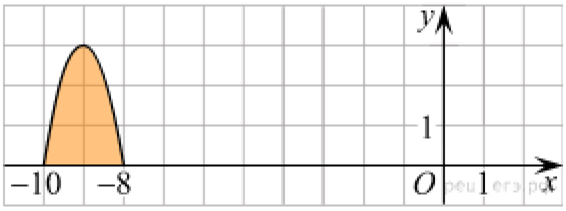

**14.** На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 10)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[4; 8]$.



| | | |
|---|---|---|
| **15.** | На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Определите количество целых чисел $x_i$, для которых значение $f(x)$ отрицательно<br> | |
| **16.** | На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.<br> | |
| **17.** | На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$.<br><br>Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл<br>$$\int_1^5 f(x)\,dx.$$ | |
| **18.** | На рисунке изображён график **первообразной** некоторой функции $f(x)$. Пользуясь графиком, вычислите определённый интеграл<br>$$\int_1^3 f(x)dx$$<br> | |
| **19.** | На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$.<br>Найдите площадь заштрихованной фигуры. | |




**20.** На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x)=-x^3-27x^2-240x-8$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.




**Часть 2.** *(Каждое задание оценивается в 2 балла)*

**1.** Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^6\left(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}-2\right)dx$

2. $\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{8}-\sin\frac{x}{8}\right)^2dx$

3. $\int_2^{23}5\sqrt[3]{9x^2-30x+25}\,dx$

4. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

5. $\int_{-3}^{2}\left|3|x|-3\right|dx.$

6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 9x\cos 8x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 9x\sin 8x\,dx;$

7. $\int_2^4(x^2+\ln x)\,dx-\int_2^4(x+\ln x)\,dx$

8. $\int_1^3\left(2x^2+\lg x\right)dx-\int_1^3\left(3x+\lg x\right)dx$

9. $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$, где $f(x)=\begin{cases}x, \text{если } x\le 0\\ \sin x, \text{если } x>0\end{cases}$

10. $\int_{\frac{1}{4}}^{2}f(x)dx$, где $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, \text{если } 0\le x\le 1\\ x^3, \text{если } x>1\end{cases}$

**2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y=x^2-6x+7,\quad y=-x^2+4x-1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2. | $y = 4 - x^2$ , $y = x^2 - 4$ | |
| | 3. | $y = x^3 + 5x^2$ , $y = x^2 - 4x$ | |
| **3.** | 4. | $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2}$ **и** $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 4x}$ | |
| **4.** | Найдите ту первообразную для заданной функции $f(x) = 12(3x-1)^3$, график которой касается оси x | | |
| **5.** | Некоторая первообразная функции $f(x) = 3\cos 3x + 6\sin 6x$ принимает в точке $x = \frac{\pi}{2}$ значение 6. Какое значение принимает та же первообразная в точке $x = \frac{\pi}{6}$ | | |
| **6.** | Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y = 8 - 0{,}5x^2$, касательной к ней $y = 2x + 10$ и прямыми $x=0$ и $x=-3$ | | |
| **7.** | Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ординат, параболой $y = 2x - x^2$ и касательной к параболе, проведенной через точку *(2;0)* | | |
| **8.** | Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{1-3x}$, касательной к графику этой функции в точке $x_0 = -5$ и прямой $y = 0$ | | |
| **9.** | Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2x + 1$ и графиком ее первообразной, проведенным через точку $K(-2;1)$ | | |
| **10.** | Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 6t^2 + t$ , где $t$ – время в секундах, $v$ – скорость в метрах в секунду. Найти путь, пройденный телом за третью секунду. | | |
| **11.** | Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $v(t) = 1 + 2t$ ,где $t$ – время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t=2$ координата точки равнялась 5. | | |

**Часть 3.** *(Каждое задание оценивается в 3 балла)*

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | Прямая $y = ax + b$ касается каждой из двух парабол $y = x^2 + 5x + 7$ и $y = x^2 - x - 5$ . Найти значения a и b, координаты точки касания и площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой. | |
| **2.** | Ускорение движения точки по координатной прямой задано формулой $a(t) = 2(t+1)^2$ , где $t$ – время движения. Найдите закон изменения скорости $v = v(t)$ и закон движения $s = s(t)$, если $v(0) = 1$ , $s(0) = 1$ | |
| **3.** | Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность 1000 г/м$^3$), заполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющую размеры 0,5 и 0,4 м ($g$= 9,8 м/с$^2$) | |
| **4.** | Дан прямолинейный стержень длиной $l$. Он неоднороден, и его плотность в точке, удаленной от левого конца на $x$, $0 \le x \le l$, определяется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найдите массу стержня, если $\rho(x) = x^2 - x + 1$, $l$= 6 | |