

ТЕМА МОДУЛЯ №5: «ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ (ФСУ).
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ»
(Глава 2. §6, §7, §8 п.8.4.)

Основные теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения теста:

1. Формулы квадрата суммы и разности.
2. Метод выделения полного квадрата
3. Формула разности квадратов.
4. Формулы куба суммы и разности.
5. Формулы разности и суммы кубов.
6. Приёмы разложения многочлена на множители.
7. Алгоритм применения ФСУ при преобразовании алгебраических выражений.
8. Алгебраические дроби и их свойства.
9. Арифметические действия с алгебраическими дробями.
10. Рациональные выражения.
11. Тождественное равенство рациональных выражений.

В процессе изучения данного модуля ученик научится/получит возможность:

1. Использовать ФСУ для упрощения вычислений значений выражений.
2. Использовать ФСУ для преобразований выражений.
3. Выполнять разложение многочленов на множители одним из способов: вынесение за скобку, группировка, использование формул сокращённого умножения.
4. Выполнять преобразования рациональных выражений: сокращение дробей, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, сложение, умножение, деление алгебраических дробей.

Умения, характеризующие достижение этого результата:

1. Применять формулы квадрата суммы и квадрата разности.
2. Применять формулу разности квадратов для упрощения выражений и вычислений.
3. Применять формулы суммы кубов и разности кубов для представления многочлена в виде произведения.
4. Применять формулы куба суммы и куба разности для преобразования в многочлен.
5. Выполнять разложение многочленов на множители, применяя стандартные приёмы: вынесение общего множителя; группировки, использование ФСУ.
6. Использовать свойства алгебраических дробей.
7. Выполнять арифметические действия с алгебраическими дробями.
8. Упрощать рациональные выражения.

1. Квадрат суммы и квадрат разности

1.1.	<p>Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение $(2x - 3)^2$.</p> <p>1) $2x^2 - 12x - 9$ 2) $4x^2 - 12x + 9$ 3) $4x^2 - 9$ 4) $4x^2 - 6x + 9$</p>
1.2.	<p>Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение $(0,2c^2 - 0,6)^2$.</p> <p>1) $0,4c^4 - 2,4c^2 + 3,6$ 2) $0,04c^4 - 0,24c^2 + 0,36$ 3) $0,04c^4 + 0,36$ 4) $0,2c^4 - 0,36$</p>
1.3.	<p>Представьте в виде многочлена выражение:</p> <p>$(x + 3)^2$; $(4 - y)^2$; $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$; $(2m - 5)^2$; $(7a + 6b)^2$; $(-11b + 2a^5)^2$; $(-8 - 4c)^2$; $\left(1\frac{2}{3}p + 2\frac{2}{5}q\right)^2$; $(12xy^2 - x^2y)^2$; $(4a^6 + 3a^4b^3)^2$.</p>
1.4.	<p>Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:</p> <p>1) $(* + 5)^2 = x^2 + * + 25$; 2) $(6a^5 + *)^2 = * + * + 49b^4$; 3) $(* - *)^2 = 9x^6 - * + 100x^4y^{10}$; 4) $(5b^2 - *)^2 = * - 30a^2b^3 + *$.</p>
1.5.	<p>Упростите выражение:</p> <p>1) $(x - 4)^2 - 6$; 2) $10a + (a - 5)^2$; 3) $(3m - 7n)^2 - 9m(n - 5n)$</p>

1.6.	<p>Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение $(4x - y)^2 - (x + 3y)^2$.</p> <p>1) $15x^2 - 14xy - 10y^2$ 2) $15x^2 - 8y^2$ 3) $15x^2 - 7xy - 8y^2$ 4) $15x^2 - 14xy - 8y^2$</p>
1.7.	<p>Запишите в виде квадрата двучлена выражение $25x^2 + 10x + 1$.</p>
1.8.	<p>Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:</p> <p>1) $a^2 + 8a + 16$; 2) $9x^2 - 6x + 1$; 3) $121m^2 - 88mn + 16n^2$; 4) $24ab + 36a^2 + 4b^2$;</p>
1.9.	<p>Замените звёздочку одночленом так, чтобы полученный трёхчлен можно было представить в виде квадрата двучлена:</p> <p>1) $* - 2by + y^2$; 2) $9c^2 + 12c + *$; 3) $64x^2 - * + 81y^2$</p>
1.10.	<p>Запишите квадрат разности одночленов $-2z$ и $7t$?</p>
1.11.	<p>Запишите квадрат суммы одночленов $5z$ и $-2t$?</p>

2. Разность квадратов

2.1.	<p>Разложите на множители двучлен $x^2 - a^2$.</p> <p>1) $(x + a)(a - x)$ 2) $xx - aa$ 3) $(x - a)^2$ 4) $(x - a)(x + a)$</p>
------	---

2.8.	Разложите на множители выражение $9y^2 - (3+2y)^2$. 1) $(y-3)^2$ 2) $(7y-3)(11y+3)$ 3) $(y+3)(5y-3)$ 4) $(y-3)(5y+3)$
2.9.	Разложите на множители: $x^2 - 4;$ $25 - 9a^2;$ $36m^2 - 100n^2;$ $0,04p^2 - 1,69q^2;$ $a^4 - b^6;$ $0,01c^2 - d^8;$ $0,81y^{10} - 400z^{12};$ $-1 + 49a^4b^8;$
2.10.	Разложите на множители: 1) $(3b - 5)^2 - 49;$ 2) $(2x - 3)^2 - (x + 4)^2;$
2.11.	Используя формулу разности квадратов, вычислите произведение $102 \cdot 98$.
2.12.	Используя формулу разности квадратов, вычислите произведение $801 \cdot 799$.
2.13.	Вычислите $56^2 - 44^2$.
2.14.	Вычислите: $5,214^2 - 2,214^2$.

3. Сумма кубов и разность кубов

3.1.	Разложите на множители двучлен $8a^3 + 1$. 1) $(2a+1)(4a^2+4a+1)$ 3) $(2a+1)(4a^2+2a+1)$
------	--

	<p>2) $(2a+1)(4a^2-4a+1)$</p> <p>4) $(2a+1)(4a^2-2a+1)$</p>
3.2.	<p>Разложите на множители выражение $a^3 - \frac{1}{27}$.</p> <p>1) $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a^2 + \frac{1}{9}\right)$ 2) $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}\right)$</p> <p>3) $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}\right)$ 4) $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}\right)$</p>
3.3.	<p>Разложите на множители:</p> <p>1) $m^3 - n^3$;</p> <p>2) $c^3 + 8$;</p> <p>3) $27a^3 - b^3$;</p> <p>4) $125 + a^3b^3$;</p> <p>5) $x^6 - y^9$;</p> <p>6) $1\,000a^{12}b^3 + 0,001c^9d^{15}$.</p>
3.4.	<p>Упростите выражение:</p> <p>1) $(x-1)(x^2+x+1) + (3-x)(9+3x+x^2)$;</p> <p>2) $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x-3)(x+3)$;</p> <p>3) $a(a+2)(a-2) - (a-4)(a^2+4a+16)$;</p>
3.5.	<p>Верно ли выполнено умножение многочленов? $(8+x)(64+8x+x^2) = 512 + x^3$</p>
3.6.	<p>Верно ли выполнено умножение многочленов? $(5-t)(25+5t+t^2) = 125 + t^3$</p>

4. Куб суммы и куб разности

4.1.	Запишите алгебраическое выражение в виде квадрата или куба двучлена: а) $x^2 + 4x + 4$; в) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; б) $x^2 - 10x + 25$; г) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
4.2.	Преобразуйте в многочлен стандартного вида $(2x+1)^3$.
4.3.	Преобразуйте в многочлен стандартного вида $(3-4a^2)^3$

5. Разложение многочленов на множители

5.1.	Разложите на множители многочлен $3xy - 12y - 2x + 8$. 1) $(3y-2)(x-4)$ 3) $(3y-2)(x+4)$ 2) $3y(x-4) - 2(x-4)$ 4) $3y(x-4) - 2(x+4)$
5.2.	Разложите на множители многочлен $a^2 - 9b^2 + 5a - 15b$. 1) $(a-3b)(a-3b+5)$ 2) $(a-3b)(a+3b)+5(a-3b)$ 3) $(a+3b)(a-3b+5)$ 4) $(a-3b)(a+3b+5)$
5.3.	Разложите на множители: 1) $11m^2 - 11$; 2) $6a^3 - 6a$; 3) $5x^3 - 5xy^2$; 4) $8a^2b^2 - 72a^2c^2$; 5) $2x^2 + 24xy + 72y^2$;

5.4.	<p>Разложите на множители:</p> <p>а) $8x^2 - 8y^2$;</p> <p>б) $-a^2 + 6a - 9$;</p> <p>в) $ab^3 - ba^3$.</p>
5.5.	<p>Представьте в виде произведения:</p> <p>а) $x^3 - xy^2 + 3y^2 - 3x^2$;</p> <p>б) $8m^4 - m^7$.</p>
5.6.	<p>Разложите на множители многочлен:</p> <p>а) $b^3 - 2b^2 + b$;</p> <p>в) $3a + 3b - ax - bx$;</p> <p>д) $7a - 7b + 2b^2 - 2ab$;</p> <p>б) $ab^3 + 2a^2b^2 + a^3b$;</p> <p>г) $5a - b + 5a^2 - ab$;</p> <p>е) $b^4 - b^2 + 4b + 4$.</p>

6. Алгебраические дроби и их свойства

6.1.	<p>Сократите дробь:</p> <p>а) $\frac{3x^2}{15x^3}$;</p> <p>б) $\frac{2x-8}{3x-12}$;</p> <p>в) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$.</p>
6.2.	<p>Какие значения переменной называются допустимыми:</p> <p>а) значения переменной, при которых числитель алгебраической дроби равен нулю;</p> <p>б) значения переменной, при которых знаменатель алгебраической дроби равен нулю;</p> <p>в) значения переменной, при которых числитель алгебраической дроби не равен нулю;</p> <p>г) значения переменной, при которых знаменатель алгебраической дроби не</p>

	равен нулю.
6.3.	<p>Найдите допустимые значения переменной алгебраической дроби</p> $\frac{27 - 3x}{5x - 10}$ <p>а) все значения x; б) все значения x, кроме 0; в) все значения x, кроме 2; г) все значения x, кроме 9 и 2; д) все значения x, кроме 9.</p>
6.4.	<p>При каком значении a дробь $\frac{a(3 - a)}{12a + 6}$ не определена?</p> <p>а) -2; б) 3; в) $-\frac{1}{2}$; г) другой ответ.</p>
6.5.	<p>Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:</p> <p>а) $\frac{3x+2}{x-1}$; б) $-\frac{6x-1}{x+1}$.</p>
6.6.	<p>Приведите дробь $\frac{a}{x-2}$ к знаменателю:</p> <p>а) x^2-2x б) $5x-10$ в) x^2-4 г) $4-x^2$</p> <p>д) $6-3x$ е) x^3-8 ж) $(x-2)^2$</p>

6.7.	<p>Сократите дробь $\frac{a(7-b)}{c(b^2-49)}$.</p> <p>1) $\frac{a}{c(b+7)}$ 2) $\frac{a}{c(b+7)}$ 3) $\frac{a}{c(b-7)}$ 4) $\frac{a}{c(7-b)}$</p>
6.8.	<p>Сократите дробь $\frac{a^2(a^2+8a+16)}{3a(a+4)}$.</p> <p>А. $\frac{a-4}{3}$ Б. $\frac{a+4}{3}$ В. $\frac{a(a+4)}{3}$ Г. $\frac{a(a-4)}{3}$</p>
6.9.	<p>Приведите дроби к общему знаменателю:</p> <p>а) $\frac{x}{x-5}$ и $\frac{3}{5-x}$; б) $\frac{x}{(x-4)^2}$ и $\frac{7}{x^2-16}$; в) $\frac{5}{x+1}$ и $\frac{7}{x-2}$.</p>

7. Арифметические действия с алгебраическими дробями

7.1.	<p>Найдите сумму дробей:</p> <p>а) $\frac{3a}{a-2b}$ и $\frac{b-1}{a-2b}$; б) $-\frac{4m^2}{7w^3}$ и $-\frac{3m^2}{7w^3}$; в) $\frac{6g^5t^4}{3t^3-8t^6}$ и $\frac{-5g^5t^4}{3t^3-8t^6}$; г) $\frac{q-p}{p-2}$ и $\frac{2p-q-2}{p-2}$; д) $\frac{49p^2}{7p-3b^2}$ и $\frac{-9b^4}{7p-3b^2}$; е) $\frac{6,4h^6}{6,4h^3-8h^6}$ и $\frac{3,6h^6}{6,4h^3-8h^6}$.</p>
------	---

7.2.	<p>Найдите разность дробей:</p> <p>а) $\frac{2x+y}{x-3y}$ и $\frac{2x-y}{x-3y}$;</p> <p>б) $\frac{a-2b}{a+2b}$ и $\frac{a+2b}{a+2b}$;</p> <p>в) $\frac{rd-r^3}{d-r^4}$ и $\frac{rd-r^5+r^3}{d-r^4}$;</p> <p>г) $\frac{i-7u}{iu}$ и $\frac{i+7u}{iu}$;</p> <p>д) $\frac{w^2-w+1}{(w+1)^2}$ и $\frac{w}{(w+1)^2}$;</p> <p>е) $\frac{f^3+g^3}{(f+g)^3}$ и $\frac{-3fg(f+g)}{(f+g)^3}$;</p> <p>ж) $\frac{2n-11n}{5n+14n}$ и $\frac{-7n-3n}{5n+14n}$;</p> <p>з) $\frac{5k^4u^6}{3ku^3-5ku^5}$ и $\frac{3rx}{3ku^3-5ku^5}$.</p>
7.3.	<p>Представьте в виде дроби:</p> <p>а) $\frac{2x-7}{18x} + \frac{2-3x}{27x}$;</p> <p>б) $\frac{b-1}{ab^2} - \frac{a+2}{a^2b}$;</p> <p>в) $\frac{7}{7p-p^2} + \frac{1}{p-7}$;</p> <p>г) $5m - \frac{5m^2}{m-2}$.</p>
7.4.	<p>Представьте в виде дроби:</p> <p>а) $\frac{4y+5}{15y^2} - \frac{2-3y}{6y^2}$;</p> <p>б) $\frac{n-2}{mn^2} - \frac{m-2}{m^2n}$;</p>

$$\text{в) } \frac{3}{c^2 - 3c} + \frac{1}{3 - c};$$

$$\text{г) } 3x - \frac{1 + 6x^2}{2x}.$$

7.5. Вычислите произведение:

$$\text{а) } \frac{5x}{2} \cdot \frac{6}{x^2};$$

$$\text{б) } (x - 1) \cdot \frac{2x + 1}{3x - 3};$$

$$\text{в) } \frac{3x + 6}{x - 3} \cdot \frac{4x - 12}{x^2 - 4}$$

7.6. Вычислите частное:

$$\text{а) } 3x : \frac{2x^2}{x - 7};$$

$$\text{б) } \frac{5x + 10}{x - 5} : \frac{3x + 6}{x^2 - 25};$$

$$\text{в) } \frac{4x - 8}{x^2 - 9} : \frac{5x - 10}{(x + 3)^2}$$

7.8. Представьте в виде дроби:

$$\text{а) } -\frac{63a^4}{64b^7} : \frac{27a^2}{48b^6};$$

$$\text{б) } \frac{x^2 - 4y^2}{xy} : (6y - 3x);$$

$$\text{в) } \frac{8c - 2d}{9c^2 - 16d^2} : \frac{16c^2 - 8cd + d^2}{9c + 12d};$$

$$\text{г) } \frac{m^2 - mn + n^2}{m^2 - 2mn + n^2} : \frac{m^3 + n^3}{m - n}.$$

8. Упрощение рациональных выражений

8.1.	<p>Упростите рациональное выражение:</p> <p>а) $\left(x + 3 + \frac{9}{x-3}\right) \cdot \frac{5x-15}{x^2}$;</p> <p>б) $(x^2 - 4) \cdot \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right)$.</p>
8.2.	<p>Выполните действия:</p> $\left(\frac{2x-y}{2x+y} - \frac{2x+y}{2x-y}\right) : \frac{4xy}{y^2-4x^2}$
8.3.	<p>Найдите значение рационального выражения:</p> <p>а) $\frac{12}{x^2-4} + \frac{3}{x+2}$ при $x=2002$;</p> <p>б) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x+1}$ при $x=19$;</p>
8.4.	<p>Докажите тождества:</p> <p>а) $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot (x^2 - 2x + 1) = \frac{2x-2}{x+1}$;</p>

$$6) \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \cdot (x^2 - 4x + 4) = \frac{4x-8}{x+2}.$$

8.5. Докажете тождества:

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 0;$$

$$\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right) \cdot \frac{x^2 - y^2}{y} = 2;$$