

11 класс (СЭ/ЕН)

2020-2021 уч.год

Банк заданий по математике для подготовки к тестированию

(учебник Никольский С.М.)

Тема модуля № 2 «Производная. Применение производной»

(Глава I. §4, §5)

Основные теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения теста:

Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной

Правила нахождения производных суммы, разности, произведения и частного.

Формулы для нахождения производных элементарных функций.

Правило для нахождения производной сложной функции.

Понятия точек максимума и минимума, экстремумов функции.

Уравнение касательной и алгоритм его нахождения.

Приближенные вычисления.

Возрастание и убывание функции, соответствие возрастания и убывания функции знаку производной.

Понятие производной высшего порядка, соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке.

Задачи на максимум и минимум.

Понятие асимптоты, способы их определения.

Методы и алгоритм исследования функции и построения ее графика с помощью производной.

Дробно-линейная функция.

В процессе изучения данного модуля ученик научится/получит возможность:

1. Вычислять производные функций, используя формулы производных элементарных функций,
2. Воспроизводить правила дифференцирования: теоремы и правила нахождения производных суммы и разности, произведения и частного, сложной функции.
3. Понимать геометрический и физический смысл производной, воспроизводить алгоритм нахождения уравнения касательной.
4. Определять и использовать понятия критических (стационарных, подозрительных на экстремум) точек, точек экстремума, точек максимума и минимума, максимума и минимума, экстремумов функции, соответствие возрастания и убывания функции знаку производной.
5. Понимать и использовать понятие производной высшего порядка.
6. Определять выпуклость графика функции, соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке.
7. Использовать алгоритм решения задачи на максимум и минимум.
8. Строить графики функций с применением производной, применять методы и алгоритм исследования функции и построения ее графика с помощью производной.

Примерные практические задания:

Теоретические вопросы

1. Записать определение производной функции
2. Чему равна производная константы?
3. Найти производную функции $y=x^3$.
4. Закончить запись $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots$
5. Чему равна производная функции $y=\operatorname{tg}x$?
6. Чему равна производная функции $y=\cos x$?
7. Чему равна производная показательной функции?
8. Закончить запись $(\ln x)' = \dots$
9. Найти производную функции $y=x^n$.
10. Записать формулу нахождения производной суммы двух функций.
11. Записать формулу нахождения производной произведения двух функций.
12. Как называется операция нахождения производной?
13. Чему равна производная линейной функции?
14. Найти производную функции $y=x^2$?
15. Закончить запись $(\sqrt{x})' = \dots$
16. Чему равна производная функции $y=\sin x$?
17. Чему равна производная функции $y=\operatorname{ctg}x$?
18. Чему равна производная логарифмической функции?
19. Закончить запись $(\lg x)' = \dots$
20. Какая функция не меняется при нахождении ее производной?
21. Записать формулу нахождения производной произведения константы на функцию.
22. Записать формулу нахождения частного суммы двух функций.
23. Найти производную функции арифметического квадратного корня.
24. Каков физический смысл производной?
25. Какой угол образует касательная с положительным направлением оси абсцисс, если функция возрастает?
26. Какой характер монотонности у функции на промежутке, если ее производная отрицательная?
27. Может ли критическая точка не являться точкой экстремума?
28. Какое необходимое условие существования экстремума в точке?
29. Продолжить предложение: «Экстремум функции – это значение переменной...»
30. Закончить предложение: «Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть ...»
31. Верно ли утверждение: «Наибольшее значение функции на отрезке совпадает с максимумом функции»?
32. Каков геометрический смысл производной?
33. Какой угол образует касательная с положительным направлением оси абсцисс, если функция убывает?
34. Какая точка называется критической точкой функции?
35. Какое достаточное условие экстремума в точке?

- 36.Продолжить предложение: «Точка экстремума – это значение переменной...»
- 37.Закончить предложение: «Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть ...»
- 38.Верное ли утверждение: «Наименьшее значение функции на отрезке совпадает со значением функции на левом конце отрезка?»
- 39.Пользуясь определением, найдите производную функции

$$A) f(x) = 4x - 5$$

$$B) f(x) = x^2 + 4x - 6$$

Нахождение производных элементарных функций. Физический и геометрический смысл производной

- 40.Найти производную функции $y = -4x + 7$.
- 41.Закончить запись $(x^9)' = \dots$
- 42.Найти $(\log_2 x)' = \dots$
- 43.Найти производную функцию $y = 2x^2 + 3x$.
- 44.Найти производную функцию $y = 3 - \frac{1}{x}$.
- 45.Найти производную функцию $y = x \cos x$.
- 46.Найти производную функцию $y = \frac{x^2}{2x + 1}$.
- 47.Закончить запись $(\operatorname{tg} 3x)' = \dots$
- 48.Найти производную функцию $y = e^{-x}$.
- 49.Найти производную функцию $y = 9x - 5$.
- 50.Найти $(a^x)'$
- 51.Найти производную функцию $y = 2x^3 - 7x$.
- 52.Найти производную функцию $y = \frac{1}{x} + 5$.
- 53.Найти производную функцию $y = x \sin x$.
- 54.Найти производную функцию $y = \frac{2x - 1}{x^2}$.
- 55.Закончить запись $(\operatorname{ctg} 5x)' = \dots$
- 56.Найти производную функцию $y = \sqrt{3x}$.
- 57.Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 30$. Записать формулу зависимости скорости от времени.
- 58.Материальная точка движется по закону $x(t) = -3t^2 - 7t - 12$. Записать формулу зависимости скорости от времени.
- 59.Найдите производную функции $y = x^4 + \sin x$
- 60.Найдите производную функции $y = 4x^5 - e^x$
- 61.Вычислите $f'(e)$, если $f(x) = x^4 \ln x$
- 62.Вычислите $f'(e)$, если $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- 63.Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = e^x + \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$

64. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + e^x$ в точке $x_0 = 0$
65. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где x – расстояние от точки отсчета (в метрах), t – время (в секундах), измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$ с
66. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 9t^3 - 7t^2 - 7t + 24$, где x – расстояние от точки отсчета (в метрах), t – время (в секундах), измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) через 5 секунд после начала движения.
67. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t) = 2 + 2t + t^2$, где $x(t)$ – координата точки (в метрах) в момент времени t (в секундах). В какой момент времени скорость точки будет равна 5 м/с?
68. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t) = \frac{t^2}{2} + 2t$, где $x(t)$ – координата точки (в метрах) в момент времени t (в секундах). В какой момент времени скорость точки будет равна 4 м/с?
69. Найдите все значения x , при каждом из которых производная функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 11$ равна нулю.

Вычисление производной функций

70. Найдите производные функций:

А) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $f'(x) =$

Б) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 3$, $f'(x) =$

В) $f(x) = e^x \cdot \cos x$, $f'(x) =$

Г) $f(x) = 3^x \cdot \log_3 x$, $f'(x) =$

Д) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$, $f'(x) =$

Е) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$, $f'(x) =$

Ж) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $f'(x) =$

З) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, $f'(x) =$

И) $f(x) = \frac{2 \cos x}{x^2 + 4}$, $f'(x) =$

К) $f(x) = x^2 \sin x$, $f'(x) =$

Л) $f(x) = 5\sqrt[5]{x^3}$, $f'(x) =$

М) $f(x) = 5^x - 2\sqrt{x+1}$, $f'(x) =$

Н) $f(x) = \frac{324}{x} - x + 6$, $f'(x) =$

$$\text{O)} f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 15, f'(x) =$$

$$\text{П)} f(x) = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8, f'(x) =$$

71. Найдите производные функций:

$$\text{A)} f(x) = (3x - 8)^{10}, f'(x) =$$

$$\text{Б)} f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 11}, f'(x) =$$

$$\text{В)} f(x) = \sqrt{-5x^2 - 10x - 4}, f'(x) =$$

$$\text{Г)} f(x) = \sin(2x - 1), f'(x) =$$

$$\text{Д)} f(x) = \cos(3x + 4), f'(x) =$$

$$\text{Е)} f(x) = \operatorname{tg}(4x - 2), f'(x) =$$

$$\text{Ж)} f(x) = \sin 3x + \sin^3 x, f'(x) =$$

$$\text{З)} f(x) = e^{3x+10}, f'(x) =$$

$$\text{И)} f(x) = 4^{6x-1}, f'(x) =$$

$$\text{К)} f(x) = 11^{3-5x-x^2}, f'(x) =$$

$$\text{Л)} f(x) = \log_6(9x + 4), f'(x) =$$

$$\text{М)} f(x) = \log_6(9x + 4), f'(x) =$$

$$\text{Н)} f(x) = \operatorname{lg} \cos^2 x, f'(x) =$$

$$\text{О)} f(x) = \ln \sin^2 x, f'(x) =$$

$$\text{П)} f(x) = \ln(2x - 5), f'(x) =$$

$$\text{Р)} f(x) = \log_5(3x + 1)^{10}, f'(x) =$$

72. Найдите производные функций:

$$\text{A)} f(x) = (5 - x)\sqrt{4 + 2x}, f'(x) =$$

$$\text{Б)} f(x) = (3 - 2x)\sqrt{5 - x}, f'(x) =$$

$$\text{В)} f(x) = (4 - x^2)\sqrt{x^2 - 5}, f'(x) =$$

$$\text{Г)} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}, f'(x) =$$

$$\text{Д)} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 4}}{x^2 - 3x + 1}, f'(x) =$$

$$\text{Е)} f(x) = \log_5^{10}(3x + 1), f'(x) =$$

$$\text{Ж)} f(x) = 5x - \ln(x + 5)^5, f'(x) =$$

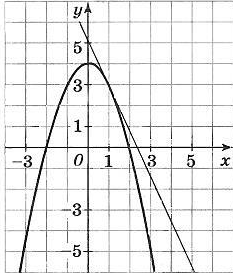
$$\text{З)} f(x) = (x + 16)e^{x-16}, f'(x) =$$

$$\text{И)} f(x) = (x + 7)^2 e^{4-x}, f'(x) =$$

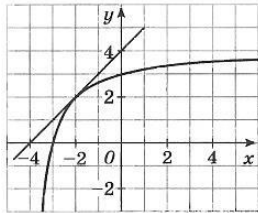
$$\text{К)} f(x) = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3, f'(x) =$$

Нахождение производной по графику функции и касательной к нему

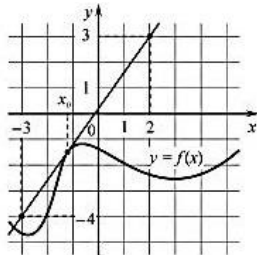
73. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Найдите $f'(x_0)$



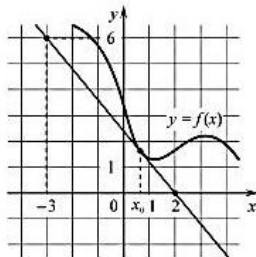
74. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Найдите $f'(x_0)$



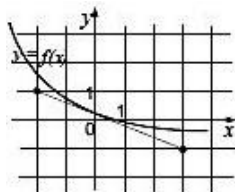
75. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



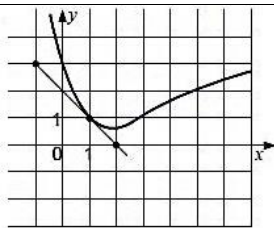
76. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



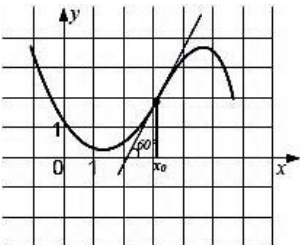
77. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 0$. Найдите значение производной $f'(0)$



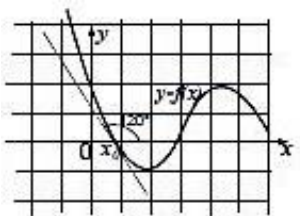
78. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой 1. Найдите значение производной $f'(1)$



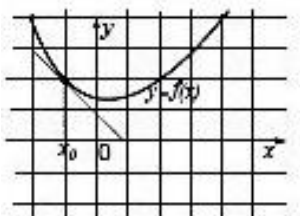
79. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 0$. Найдите значение выражения $\sqrt{3}f'(x_0)$



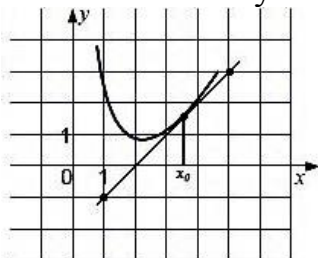
80. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 , образующая угол 120° с осью x . Найдите значение выражения $\frac{f'(x_0)}{\sqrt{12}}$



81. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 , параллельная биссектрисе 3-й четверти. Найдите значение выражения $2f'(x_0) + 1$



82. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите угол наклона этой касательной (в градусах) к положительному направлению оси Ox



Уравнение касательной к графику функции

83. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = a$, если

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2, \quad a = 1$$

$$f(x) = x^4 - 4x + 1, \quad a = 2$$

$$f(x) = \log_3 x, \quad a = 1$$

$$f(x) = 3^x, \quad a = 1$$

$$f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x - 11, \quad a = 2$$

84. Дана функция $f(x) = x^4 - 4x + 1$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной оси Ox
85. Дана функция $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной прямой $y = -2x + 1$
86. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку $A(0; -5)$
87. Даны функции $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ и $g(x) = x^2 + 2$. Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Нахождение промежутков возрастания/убывания функции, критических точек, точек минимума/максимума, точек экстремума, наибольшего/наименьшего значения функции, интервалов выпуклости.

88. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$\text{А) } f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

$$\text{Б) } f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 3$$

$$\text{В) } f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$$

$$\text{Г) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{Д) } f(x) = (x - 1)^2 e^{2x}$$

89. Найдите критические (стационарные) точки функции:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x - 7$$

В ответе укажите сумму критических точек, принадлежащих промежутку $[-2; 3]$

90. Найдите критические (стационарные) точки функции: $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$. В ответе укажите сумму критических точек, принадлежащих промежутку $[-1; 8]$

91. Найдите точку минимума функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

92. Найдите точку минимума функции $f(x) = \frac{324}{x} + x + 6$

93. Найдите точку минимума функции $f(x) = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

94. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, а также наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2; 2]$

95. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 7$ на промежутке $[0; 2]$

96. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 9x + 7$ на отрезке $[19,25;25,25]$

97. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 69 \cos x + 71x + 48$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

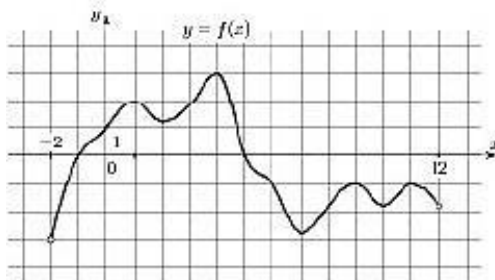
98. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ на отрезке $[-\sqrt{7}; 2\sqrt{3}]$

99. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз, точки перегиба функции

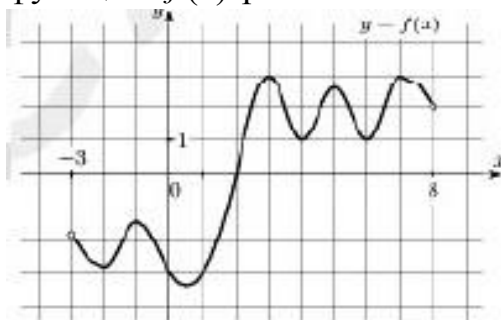
1.	$f(x) = x^4 - 24x^2 + 3x + 5$
2.	$f(x) = x^2 e^{-x}$
3.	$f(x) = 5x - \sin 2x$

100. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$

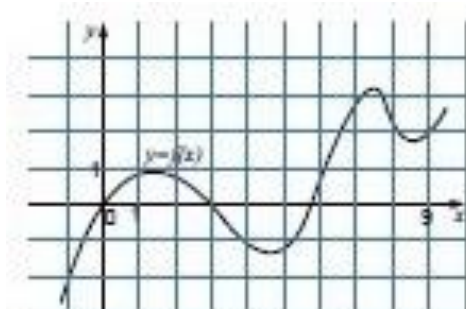
101. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $[-2; 12]$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$



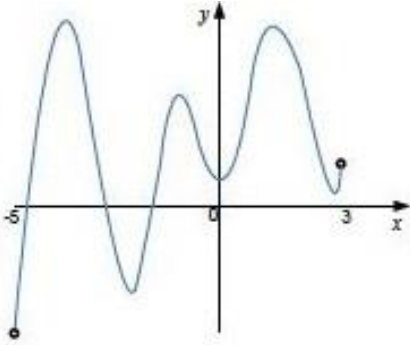
102. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $[-3; 8]$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0



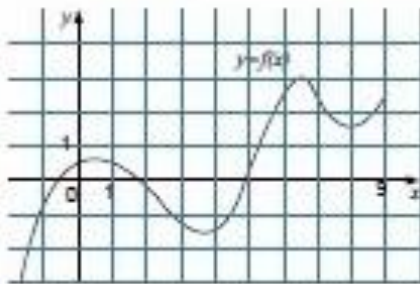
103. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Определите количество целых точек на отрезке $[-1; 9]$, в которых производная функции положительна



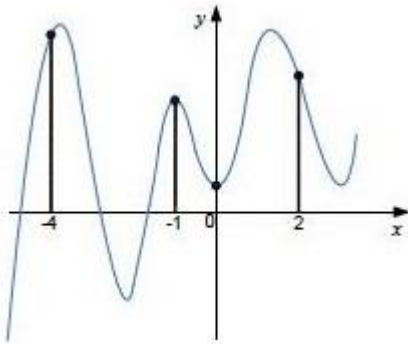
104. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $[-5; 3]$. Найдите количество точек на интервале $(-3; 3)$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 5$



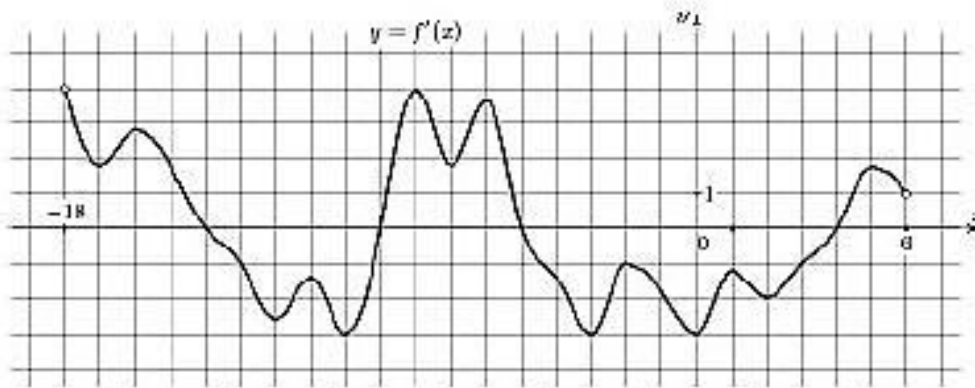
105. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Определите количество точек на интервале $(0; 9)$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2x - 5$



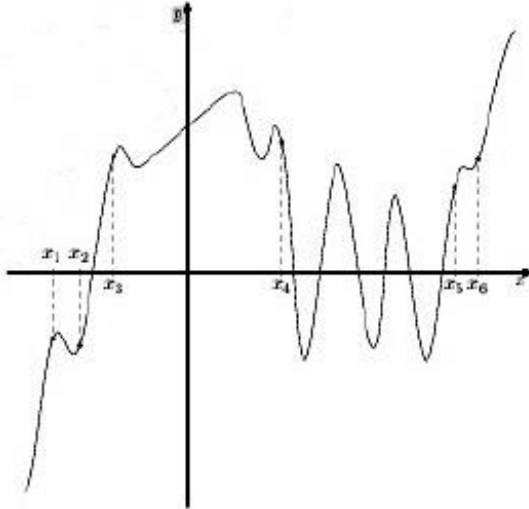
106. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -4 ; -1 ; 0 ; 2 . В какой из точек касательная к графику функции образует острый угол с положительным направлением оси x ? В ответе укажите абсциссу этой точки



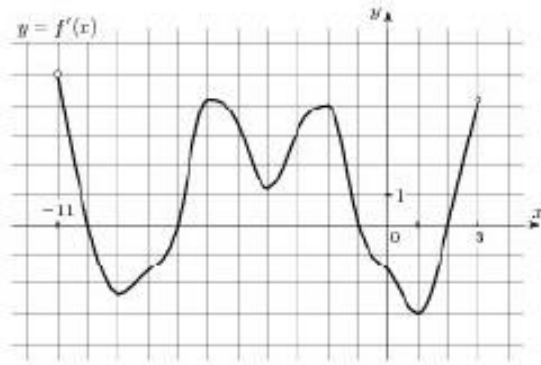
107. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-13; 1]$



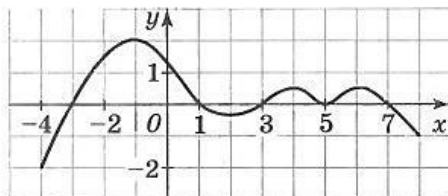
108. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$. В скольких из этих точек функция убывает



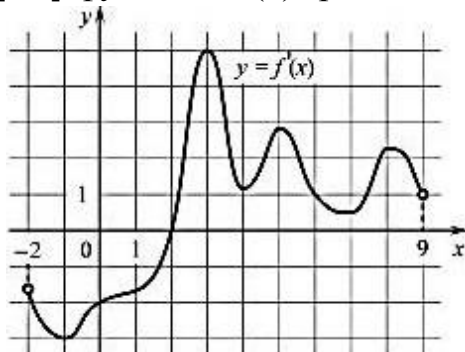
109. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них



110. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-4; 8]$. Найдите сумму длин промежутков возрастания функции $f(x)$ на заданном отрезке

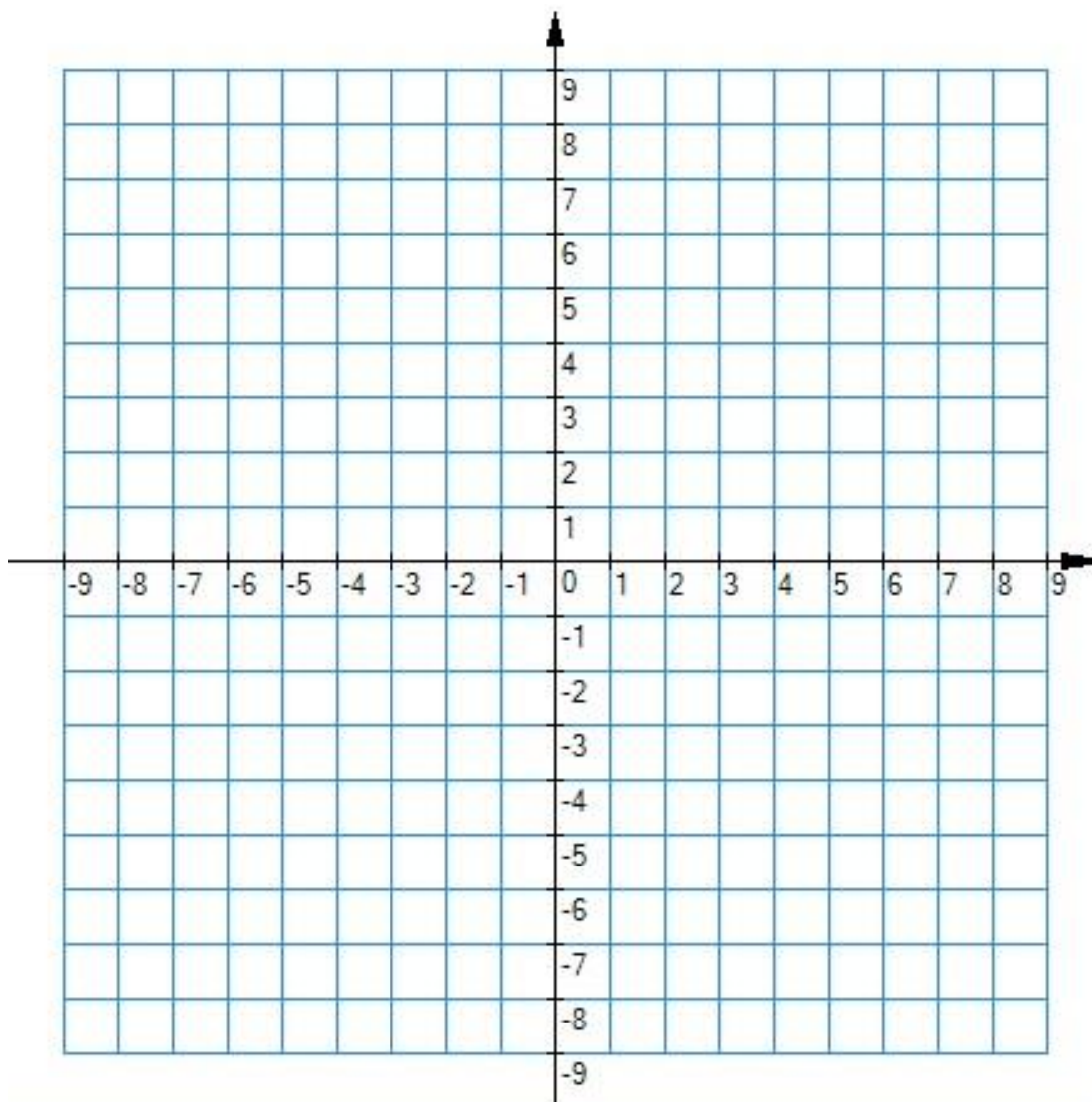


111. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение



Исследование функции

112. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и постройте ее график

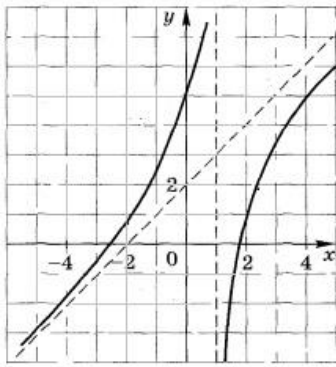


113. Исследуйте функции методами производной и установите соответствия между функциями и их поведением на указанных интервалах

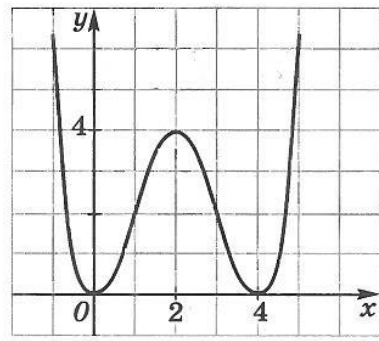
А. $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2$	Б. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 28$	В. $f(x) = -x + \frac{4}{3-x} - 2$	Г. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)^2$
<p>1.</p>	<p>2.</p>	<p>3.</p>	<p>4.</p>

114. Исследуйте функции методами производной и установите соответствия между функциями и их графиками

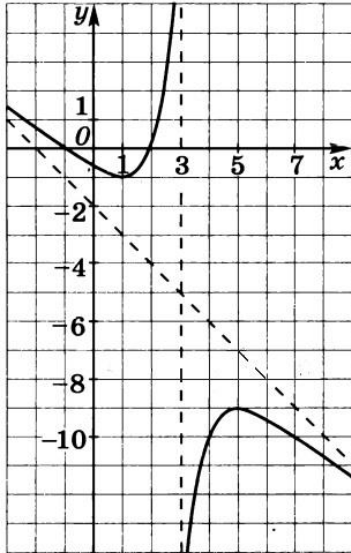
А. $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2$	Б. $f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x-1}$	В. $f(x) = -x + \frac{4}{3-x} - 2$	Г. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)^2$
--------------------------------------	--	---------------------------------------	---------------------------------------



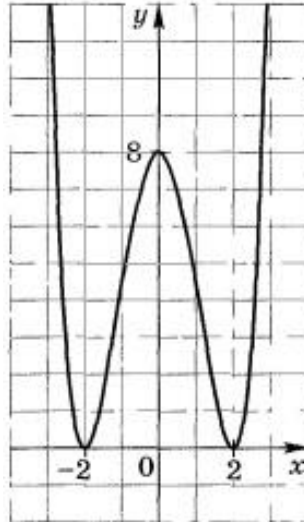
1.



2.



3.



4.