

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП 2020–2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

**РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА**

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**9 класс**

***Если ситуация в решении участника подходит под критерии, то оценивается установленным в критериях количеством баллов. Если решение работы участника не соответствует ни одному из критериев, то используется 7-балльная шкала (см. таблицу в методических указаниях), которая наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.***

**9.1.** Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 111? Ответ объясните.

**Ответ:** 72.

***Решение.*** 111=37·3. Исключим из дробей с числителями от 1 до 111 все дроби с числителями, кратными 3, т.е. каждое третье число. 111-37=74. Из оставшихся 74 чисел нужно исключить числа, кратные 37 и не кратные 3: 37 и 74. Получаем: 74-2=72.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Ответ неверный, объяснения неверные или отсутствуют.

**2 балла.** Получен верный ответ, но отсутствуют объяснения.

**3 балла.** Ответ неверный, так как не исключены числа, кратные 37 и не кратные 3.

**7 баллов.** Ответ верный, объяснения правильные.

**9.2.** Чему равно$ x^{3}+3xy+y^{3}$, если $x+y=1$?

**Ответ:** 1.

***Решение.*** $x^{3}+3xy+y^{3}$=$ x^{3}+3xy\left(x+y\right)+y^{3}=\left(x+y\right)^{3}=1$.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Только верный ответ (без обоснования).

**9.3.** Существует ли трехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию?

**Ответ:** не существует.

***Решение.*** Предположим, что данное число существует. Обозначим первую его цифру за $x$, тогда вторая будет равна $x + d$, а третья – $x + 2d$, где $d$ – целое число из промежутка от -4 до 4. Сумма этих цифр будет равна $3x +$ $+3d. $Она делится на три, значит и само число делится на три, следовательно, оно не может быть простым.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Верный ответ без обоснований.

**1 балл.** Рассмотрены не все частные случаи.

**9.4.** В треугольнике $ABC$ длина стороны $AB$ равна 6,‍ а длина стороны $AC$ – 8. Медианы $BN$‍ и $CM$ этого треугольника взаимно перпендикулярны. Найдите сторону $BC$ треугольника $ABC$.

***Решение.*** Пусть $O$ −‍ точка пересечения медиан $BN$‍ и $CM$ треугольника $ABC$.‍ Обозначим $ON = x$,‍ $OM = y$.‍ Тогда $OB = 2x$,‍ $OC = 2y$.‍ По теореме Пифагора $BM^{2}‍ = OM^{2}‍ + OB^{2}‍$, $CN^{2} = ON^{2}‍ + OC^{2}‍$,‍ или $y‍^{2} + 4x^{2}‍= $9, $x^{2}‍+ 4y^{2}‍ = 16$.‍ Сложив почленно эти равенства, получим, что $5x‍^{2}+ 5y^{2}‍= =25$.‍ Поэтому $x‍^{2}+ y^{2}‍= 5$.‍ Следовательно, $BC = ‍\sqrt{OB^{2}‍+ OC^{2}‍} =$ ‍ ‍=$\sqrt{4x^{2}+4y^{2}}$ = 2‍$\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ = $2‍\sqrt{5}$.

**Критерии проверки.**

**4 балла.** Составлена система уравнений (без дальнейших продвижений).

 **9.5.** На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (то есть между книгами по белой магии и не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

**Ответ:** 336.

***Решение.*** Разобьем книги на цепочки книг, идущих через 13:

1-я, 15-я, 29-я, …;

2-я, 16-я, 30-ая…;

и т.д.

Всего получим 14 цепочек. Из того, что 666=14·47+8, следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 14-8=6 цепочек по 47 книг. В каждой из цепочек книги по условию книги по белой магии не могут быть соседними. Значит в любой цепочке длины 48 их наибольшее количество равно 24 (через одну), и в цепочке длиной 47 их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего 14·24=336 книг.

**Критерии проверки.**

**3 балла.** Правильный ответ с примером расстановки, но без доказательства максимальности.

**4 балла.** Правильная оценка на максимальное число книг без примера.