

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП 2020–2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

**РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА**

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**11 класс**

***Если ситуация в решении участника подходит под критерии, то оценивается установленным в критериях количеством баллов. Если решение работы участника не соответствует ни одному из критериев, то используется 7-балльная шкала (см. таблицу в методических указаниях), которая наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.***

**11.1.** Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

***Решение.*** После первого размена будет 5 монет, после второго будет 9 (5-1+5=9), после 3 – 13, после 4 – 17 и т.д. все числа при делении на 4 дают остаток 1. При делении 55 на 4 имеется остаток 3, значит, не получится разменять рубль на 55 монет.

**Ответ:** нет.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Приведен только верный ответ.

**7 баллов.** Любое правильное решение.

**11.2.** Существуют ли два целых числа, сумма кубов которых равна 2021?

***Решение 1.***

Число 2021 можно представить в виде произведения двух целых чисел следующими восемью способами: 2021=1·2021=43·47=47·43=2021·1=

=(-1)·(-2021)=(-43)·(-47)=(-47)·(-43)=(-2021)·(-1). Сумма кубов отрицательных чисел отрицательна (для последних четырёх случаев) и не может быть равна 2021, поэтому достаточно рассмотреть 4 системы:

1)

Во втором уравнении левая часть делится на 3, а правая не делится. Целых решений нет.

2)

Целых решений нет.

3)

Целых решений нет.

4)

Целых решений нет.

***Решение 2.*** Кубы натуральных чисел дают остатки 0, 1, 8 при делении на 9. Сумма двух кубов натуральных чисел дает остатки 0, 1, 2, 7, 8 при делении на 9. Число 2021=224·9+5, т.е. даёт остаток 5 при делении на 9. Значит, не существуют два целых числа, сумма кубов которых равна 2021.

**Ответ:** целых чисел, сумма кубов которых равна 2021, не существует.

**Критерии проверки.**

**0 баллов**. Получено разложение 2021=43·47.

**4 балла.** Задача сведена к решению 8-ми или 4-х систем уравнений.

**7 баллов.** Любое верное и обоснованное решение.

**11.3.** Внутри круга радиуса 15 взята точка *M*‍ на расстоянии 13 от центра. Через точку  *M*‍ проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой *M*.

**Ответ:** 4 и 14.

***Решение 1.***Пусть *O* – центр данной окружности, *AB* – данная хорда, *AB* = 18, *OM* = 13 (см. рис.).

Пусть *P* – основание перпендикуляра, опущенного из центра *O* на хорду *AB*. Тогда *P* – середина *AB* и *OP* = == = 12, *PM* = = = 5. Если точка *P* расположена между *M* и *A*, то , *BM* = *BP* – *PM* = =18 – 14 = 4.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

 ***Решение 2.*** Пусть *O* центр окружности (см. рис.), *AB* − данная хорда. Проведём диаметр *CD*, содержащий точку *M* (*M* между *O* и *D*). Обозначим *MB* = *x*. Тогда *AM* = 18 − *x*, *DM* = *OD* – *OM* = 15 – 13 = 2;

*MC* = *OM* + *OC* = 13 + 15 = 28. По свойству хорд *AM* · *MB* = *MD* · *MC*, или

(18 − *x*) *x* = 2 · 28. Из этого уравнения находим, что *x* = 4 или *x* = 14.

**Критерии проверки.**

**4 балла.** Верное решение с арифметической ошибкой. (Например, во втором решении правильно составлено уравнение, но неверно решено.)

**11.4.** Многочлен . Удвойте у него несколько (больше одного) коэффициентов так, чтобы полученный многочлен представлялся в виде произведения двух многочленов степени больше первой каждый.

***Решение.*** Удвоим все коэффициенты, кроме коэффициентов при и свободного члена. Тогда

**Критерии проверки.**

**1 балл.** Если приведен способ получения многочлена при удвоении всего одного коэффициента.

**1 балл.** Если приведен способ получения многочлена, при разложении которого один из множителей имеет первую степень.

**0 баллов.** Если допущены обе ошибки, описанные выше.

**4 балла.** Если полученный многочлен подходит под условия, но не показано на какие многочлены он раскладывается.

**11.5.** Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

**Ответ:** 61.

***Решение.*** Предположим, что в шляпе находится 60 белых лент, 20 синих и 20 зеленых. Тогда, если вытащить 81 ленту, то среди них точно найдется ленты всех трех цветов. А если вытащим 60 лент, то может оказаться, что все ленты одного цвета. Значит, 60 лент вытащить недостаточно.

Попробуем проанализировать, что будет, если лент, например, белого цвета не меньше 61 ( штук), а второй цвет по количеству лент – синий. Тогда в шляпе находится хотя бы синих лент. А значит, что общее количество лент белого и синего цветов не меньше Так как лент целое количество, то лент белого и синего цветов не менее 81. Но по условию среди любых 81 лент, обязательно должны быть три разноцветные ленты.

**Критерии проверки.**

**1 балл**. Только верный ответ.

**5 баллов**. Доказано, что 60 лент может не хватить.

**7 баллов.** Верное решение и доказано, что 61 ленты хватит.