****

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП 2020–2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

**РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА**

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**10 класс**

***Если ситуация в решении участника подходит под критерии, то оценивается установленным в критериях количеством баллов. Если решение работы участника не соответствует ни одному из критериев, то используется 7-балльная шкала (см. таблицу в методических указаниях), которая наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.***

**10.1.** Разменный аппарат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

***Решение.*** После первого размена будет 5 монет, после второго будет 9 (5-1+5=9), после 3 – 13, после 4 – 17 и т.д. все числа при делении на 4 дают остаток 1. При делении 55 на 4 имеется остаток 3, значит, не получится разменять рубль на 55 монет.

**Ответ:** нет.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Приведен только верный ответ.

**7 баллов.** Любое правильное решение.

**10.2.** Чему равно$ x^{3}+3xy+y^{3}$, если $x+y=1$?

***Решение.*** $x^{3}+3xy+y^{3}$=$x^{3}+3xy\left(x+y\right)+y^{3}=\left(x+y\right)^{3}=1$.

**Ответ:** 1.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Только верный ответ (без обоснования).

**10.3.** 10 ребят договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо правдивцем (правдивцы всегда говорят правду). Известно, что каждый из них любит ровно один вид сока: яблочный, апельсиновый или гранатовый. Сначала ведущий попросил поднять руки тех, кто любит яблочный сок, и все подняли руки, потом тех, кто любит апельсиновый сок – и половина игроков подняли руки, потом тех, кто любит гранатовый – и руку поднял только один игрок. Сколько правдивцев среди игроков?

***Решение.*** Игроки, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а игроки, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 16 рук (10+5+1). Если бы все игроки сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого игрока заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 игроков солгали, а 4 сказали правду. Значит, правдивцев всего 4.

**Ответ:** 4.

**Критерии проверки.**

**0 баллов.** Только верный ответ (без примера и решения).

**2 балла.** Верный ответ, полученный на конкретном примере.

**7 баллов.** Полное решение и верный ответ.

**10.4.** В треугольнике *MNK* точки *E* и *F* расположены на сторонах *MN* и *NK* соответственно. Треугольник *ENF* остроугольный, и *ER*, *FS* – его высоты. Докажите, что если около четырехугольника *MEFK* можно описать окружность, то *SR||MK*.

***Решение.*** Так как четырехугольник *MEFK* вписанный, то ∠*NMK*+∠*EFK*=180°. Но ∠*NFE*+∠*EFK*=180° (смежные), поэтому ∠*NMK*=∠*NFE*. Около четырехугольника *ESRF* можно описать окружность с диаметром *EF*, так как ∠*ESF*=∠*ERF*=90° (по условию образованы высотами). Поэтому ∠*EFR*+∠*RSE*=180°, а значит ∠*NMK*+∠*RSE*=180°, то есть сумма односторонних углов ∠*NMK* и ∠*RSE* при прямых *MK, SR* и секущей *MS* равна 180°. Отсюда получаем *SR||MK*, что и требовалось доказать.

**Критерии проверки.**

**1 баллов.** Доказано равенство углов ∠*NMK* и ∠*NFE* (без дальнейших продвижений).

**3 балла.** Доказано, что *ESRF* - вписанный четырехугольник .

**7 баллов.** Полное обоснованное доказательство.

**10.5.** Фокусник для выступления поместил в волшебную шляпу 100 лент: белые, синие, зеленые. При подготовки номера выяснилось, что из 81 вытащенной произвольным образом ленты, обязательно найдутся три разноцветных. И теперь фокусник думает, какое наименьшее число лент надо достать из шляпы, чтобы среди них точно было две разноцветных?

**Ответ:** 61.

***Решение.*** Предположим, что в шляпе находится 60 белых лент, 20 синих и 20 зеленых. Тогда, если вытащить 81 ленту, то среди них точно найдется ленты всех трех цветов. А если вытащим 60 лент, то может оказаться, что все ленты одного цвета. Значит, 60 лент вытащить недостаточно.

Попробуем проанализировать, что будет, если лент, например, белого цвета не меньше 61 ($a$ штук), а второй цвет по количеству лент – синий. Тогда в шляпе находится хотя бы $\frac{100-a}{2}$ синих лент. А значит, что общее количество лент белого и синего цветов не меньше $\frac{100-a}{2}+a=$ $\frac{100+a}{2}\geq \frac{100+61}{2}=80,5.$Так как лент целое количество, то лент белого и синего цветов не менее 81. Но по условию среди любых 81 лент, обязательно должны быть три разноцветные ленты.

**Критерии проверки.**

**1 балл**. Только правильный ответ.

**5 баллов**. Доказано, что 60 лент может не хватить.

**7 баллов.** Верное решение и доказано, что 61 ленты хватит.