

1	2	3	4	5	Σ	
7	7	7	6	3	30	<del>Или</del>
7	7	4	6	3	30	<del>Или</del>

М-126-16

Для отметок  
жюри

1) Разложим 111 на прост. мк:

$$\underbrace{3}_{\text{прост}} \cdot \underbrace{37}_{\text{прост}} = 111$$

Значит дробь имеет вид:

$$\frac{x}{3 \cdot 37}$$

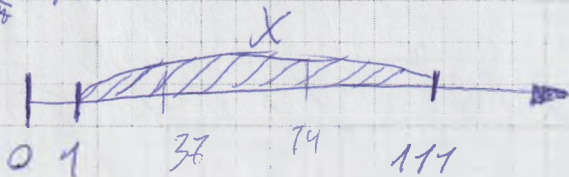
Значит, дробь удовл. условиям

имеет  $x$  не делящийся на 3, 37.

(ну и 111 конечно)

Всего на роль  $x$  подходят 111 чисел,  
ведь дробь должна быть правильной, т.е.

$$x \leq 111$$



ноль не учитываем.

Итого у нас 111 чисел:  $[1; 111]$

Убираем число 111. - образует дробь в 1.

Убираем числа 37, 74 ( $37 \cdot 2$ ) - делится на 37

Убираем 36 чисел, которые делются  
на 3 и 37, промежутка  $[3; 108]$

Итого получаем

$$III - \overset{(11)}{1} - \overset{(17,74)}{2} - \overset{(311,3)}{36} = 72 \text{ числа}$$

Ответ: 72 числа подходят на роль  
числителя  $\Rightarrow$  72 дробей (правильных, несокр.)

9).

$$x + y = 1$$

чему равно  $x^3 + 3xy + y^3$ ?

возведем  $x + y = 1$  в <sup>уб</sup> куб

$$(x + y)^3 = 1^3$$

$$(x + y)(x^2 + 2xy + y^2) = 1$$

$$x^3 + \underline{x^2y} + \underline{2x^2y} + \underline{2xy^2} + \underline{xy^2} + y^3 = 1$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1$$

$$x^3 + 3xy(x + y) + y^3 = 1$$

1 по усл.

$$x^3 + 3xy + y^3 = 1$$

Ответ:  $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ .

3) Пусть  $p$  - простое число,  
а  $a, b$  и  $c$  - его цифры

~~Тогда~~ Тогда

$$100a + 10b + c = p \quad (p \text{ трехзнач.})$$

По условию  $a, b, c$  - это арифметич.  
прогрессия.  $\Rightarrow$

$$b = a + d \quad \text{— произвольное } \begin{matrix} \text{(целое)} \\ \text{постоянное} \\ \text{слагаемое} \\ \text{в прогрессии} \end{matrix}$$

$$c = a + 2d$$

Подставим

$$100a + 10(a+d) + (a+2d) = p$$

$$100a + 10a + 10d + a + 2d = p$$

$$111a + 12d = p$$

$$3(37a + 4d) = p \Rightarrow p \text{ делится на } 3.$$

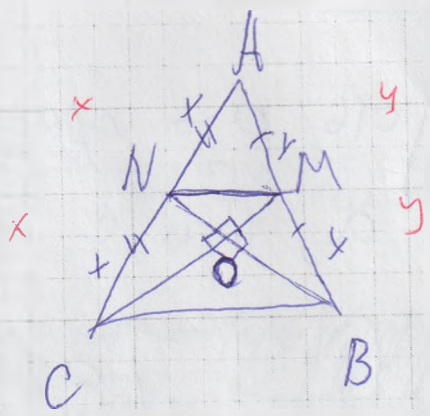
Мы пришли к противоречию.

Ответ: не существует.

4) Дано  
 $AB = 6$   
 $AC = 8$   
 $BN$  и  $CM$  - медианы  
 $BN \perp CM$   


---

 $BC = ?$



Пусть  $CN = x$ , тогда и  $AN = x$   
 (медиана делит на две равные части.)

Таким же образом  $BM = y = AM$ .

По т. Пифагора для  $\triangle CNO$  и  $\triangle BOM$ :

~~$x^2 = CO^2 + NO^2$   
 $y^2 = MO^2 + BO^2$   
 $CO = 2MO$   
 $BO = 2NO$~~  медианы при пересек. делятся

~~$x^2 = CO^2 + NO^2$   
 $y^2 = MO^2 + BO^2$   
 $CO = 2MO$   
 $BO = 2NO$~~

$$\begin{cases} x^2 = CO^2 + NO^2 \\ y^2 = MO^2 + BO^2 \end{cases}$$

$CO = 2MO \rightarrow$  пересек. медианы делятся в отн. 1:2  
 $BO = 2NO$

$$\begin{cases} x^2 = 4MO^2 + NO^2 \\ y^2 = MO^2 + 4NO^2 \end{cases}$$

⊕  $NO^2 = x^2 - 4MO^2$

⊕  $y^2 = MO^2 + 4x^2 - 16MO^2$

$y^2 - 4x^2 = -15MO^2$

$4x^2 - y^2 = 15MO^2$

$MO^2 = \frac{4x^2 - y^2}{15}$

~~$MO = \sqrt{\frac{4x^2 - y^2}{15}}$~~

$y^2 = \frac{4x^2 - y^2}{15} + 4NO^2$

$4NO^2 = y^2 - \frac{4x^2 - y^2}{15}$

$NO^2 = \frac{y^2}{4} - \frac{4x^2 - y^2}{60}$

$BC^2 = CO^2 + BO^2$  (по т. айрагора для  $\triangle COB$ )

$BC^2 = (2MO)^2 + (2NO)^2$

AC = 2 AB = 6

⊕  $BC^2 = 4MO^2 + 4NO^2$

$x = \frac{1}{2} AC$  (медiana BN)

$y = \frac{1}{2} AB$  (медiana CM)

$MO^2 = \frac{4 \cdot 16 - 3^2}{15} = \frac{55}{15}$

$NO^2 = \frac{9}{4} - \frac{4 \cdot 16 - 5^2}{60}$

$= \frac{89}{60}$

ошибка  $\rightarrow$   
в возмещении

$\frac{30}{60} ?$

(80)

Все верно. Но есть (сч. стр. 5) арисрм. ошибке.

Для отметок жюри

$$MO^2 = \frac{11}{3} \quad NO^2 = \frac{89}{60}$$

$$BC^2 = \frac{44}{3} + \frac{356}{60} = \frac{880}{60} + \frac{356}{60} = \frac{1236}{60} = 20,6$$

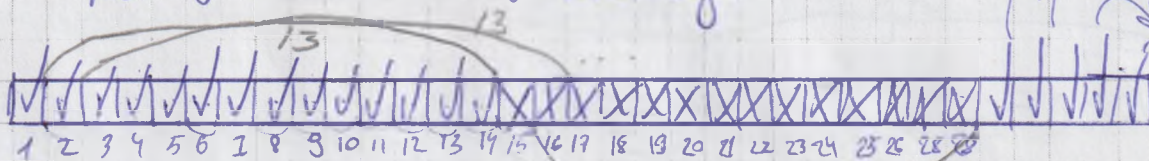
$$BC = \sqrt{20,6}$$

Ответ:  $BC = \sqrt{20,6} \ominus$

5) Будем заполнять "массив", с лева на право

от лежать точки на которые мы уже не сможем ставить книги.

✓ - поставленная книга x - место, на которое книга ставится.



(30)

Пример  $\oplus$   
Оценка  $\ominus$

Мы видим таблицу, что при макс. плотности загрузке точки как разбиваются на участки длиной в 14 книг, сначала белых, а затем черных. Всего таких участков  $\lfloor \frac{556}{14} \rfloor = 47$  и еще один маленький

каждый участок с черными книжками - белый (они чередуются, начиная с белого) значит, всего белых книг  $24 \times 14 = 336$

Ответ: 336.