ШИФР M 407 - 18

1	2	3	4	5	Итого:
7	7	7	7	6	34б
7	7	7	7	6	34

Для отметок жюри

№2.

$a^3+b^3=2021$, $a,b\in\mathbb{Z}$

~~$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=2021$~~

~~$2021=43\cdot 47$, причем 43 и 47 — простые числа.~~

~~Т.к. $a,b\in\mathbb{Z}$, то и $(a+b)\in\mathbb{Z}$ и $(a^2-ab+b^2)\in\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ либо множители равны 1 и 2021, либо 43 и 47.~~

~~$a+b\neq 1$ т.к. если $a+b=1$~~

Рассмотрим число 2021 по модулю 9: $2021\equiv 5 \pmod 9$ (т.к. $2021=224\cdot 9+5$).

Любое целое число дает остатки от 0 до 8 при делении на 9. Значит, чтобы найти, какие остатки дают кубы целых чисел, нужно возвести в куб все возможные остатки при делении на 9.

$0^3\equiv 0 \pmod 9$ $\quad 1^3\equiv 1 \pmod 9$ $\quad \cancel{2^3=8\equiv -1 (\mathrm{mod}}$

$2^3=8\equiv -1 \pmod 9$ $\quad 3^3=9\cdot 3\equiv 0 \pmod 9$ $\quad 4^3=64\equiv 1 \pmod 9$

$5^3\equiv(-4)^3 \pmod 9\equiv -1 \pmod 9$ $\quad 6^3\equiv(-3)^3 \pmod 9\equiv 0 \pmod 9$

$7^3\equiv(-2)^3 \pmod 9\equiv 1 \pmod 9$ $\quad 8^3\equiv(-1)^3 \pmod 9\equiv -1 \pmod 9$

Отсюда, кубы целых чисел при делении на 9 дают только остатки $-1;0;1$. Значит, сумма кубов двух целых чисел дает остатки $-2;-1;0;1;2$.

А какие может?

Т.к. $a,b\in\mathbb{Z}$, то a^3+b^3 не может давать остаток 5 при делении на 9, то есть a^3+b^3 не может быть равно 2021.

Ответ: не существует.

7б

Для отметок жюри

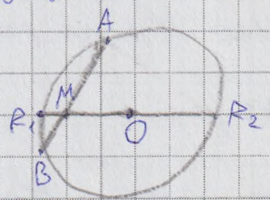
№1. Т.к. аппарат всегда меняет одну монету на 5, то ~~о~~ после каждого обмена общее количество монет увеличивается на 4. Пусть чтобы получить ~~с~~ 55 монет мы совершили x обменов, тогда, т.к. изначально была 1 монета, в конце станет $1+4x$ монет, значит можно записать равенство $1+4x=55$.

$4x=54$ $\quad x=\frac{54}{4}=13{,}5$ – что невозможно, т.к. x – количество обменов.

Значит, невозможно разменять 1 монету на 55.

Ответ: нет, нельзя. 7б

№3. Дано: окр. ~~(О~~ с центром в т. О и радиусом $R=15$.
$OM=13$; AB – хорда; т. $M \in AB$.
~~AB~~ $AB=18$.
Найти: $AM=?$ $MB=?$



Решение:
продлим OM до пересечения с окружностью. Пусть OM пересекает окр. в точках R_1 и R_2.

Тогда, R_1R_2 и AB – хорды окружности, пересекающиеся в т. $M \Rightarrow R_1M \cdot MR_2 = AM \cdot MB$ (по свойству пересекающихся хорд в окружности).

$R_1M = R_1O - OM = R - OM = 15-13=2$; $\cancel{O}MR_2 = MO+OR_2 = 13+R = 13+15=28$

$AM \cdot MB = 2\cdot 28=56$. ~~AM~~ $AB=AM+MB=18 \Rightarrow$ ~~AM~~ $MB=18-AM$

$AM\cdot(18-AM)=56$ $\quad AM^2-18AM+56=0$ $\quad AM=\frac{18\pm\sqrt{18^2-56\cdot 4}}{2}$

$AM=\frac{18\pm 2\cdot\sqrt{9^2-56}}{2} = 9\pm\sqrt{25} = 9\pm 5 = 4;\ 14.$

$MB = 18-AM = 14;\ 4.$

Ответ: $(14;4)$; $(4;14)$.

7б

№4. Увеличим коэффициенты у 7, 4 и 1 степеней, ~~то~~ тогда $P(x)= x^8+2x^7+x^6+x^5+2x^4+x^3+x^2+2x+1$

7б

$P(x)= x^6(x^2+2x+1)+x^3(x^2+2x+1)+\cancel{x}1(x^2+2x+1) =$
$=(x^2+2x+1)\cdot(x^6+x^3+1)$.

ШИФР М407-18

Для отметок жюри

№5. Пусть x, y, z – количество белых, синих, зелёных лент. Тогда, если бы ~~$x+y$~~ было верно неравенство $x+y \geq 81$, то возможен был бы случай, когда ~~[illegible]~~ все 81 ленты состоят только из 2 цветов. Значит $x+y \leq 80$, аналогично и для сумм $x+z$ и $y+z$.

~~Тд~~ Получаем систему: $\begin{cases} x+y \leq 80 \\ y+z \leq 80 \\ x+z \leq 80 \\ x+y+z=100 \end{cases}$

$x+y=100-z \Rightarrow 100-z \leq 80 \Rightarrow z \geq 20$, аналогично для x и y

~~$x+y \leq 80$~~ ~~$x+z \leq 80$~~ $x \geq 20 \Rightarrow y \leq 60$ т.к. $x+y \leq 80$, аналогично и для x и z.

Получаем, что $x \leq 60$, $y \leq 60$ и $z \leq 60$. Значит, если мы возьмём не более 60 ~~не~~ лент, то есть шанс, что мы возьмём все ленты одного цвета. Значит, нужно взять минимум 61 ленту.

Ответ: 61.

~~6~~ 6б Почему?

6 баллов! Вер-

Страница 3 из 3