**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике**

**10 класс**

**10.1** Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 — палиндром, а 2015 — нет). Представьте число 2018 в виде суммы двух палиндромов.

**10.2** Можно ли на плоскости отметить 10 точек так, чтобы любые три из них были вершинами тупоугольного треугольника?

**10.3** Может ли квадратное уравнение ax2+bx+ c =0 с целыми коэффициентами иметь дискриминант равный 23?

# **10.4** Передние колёса автомобиля изнашиваются быстрее, чем задние: передние-при прохождении 10000 км, а задние – при прохождении 15000 км. Поэтому колёса периодически меняются местами. Какой максимальный путь может пройти автомобиль с данными четырьмя колёсами?

**10.5**. При входе в тайный математический клуб Петя должен каждый день называть пятизначное число такое, что сумма первых двух его цифр не должна превосходить 9, а сумма последних трех не должна превосходить 2. Если Петя скажет число, которое уже называл, его навсегда исключат из клуба. Докажите, что Петя сможет ходить в клуб больше года.

**РЕШЕНИЯ 10 класс**

**10.1**. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 — палиндром, а 2015 — нет). Представьте число 2018 в виде суммы двух палиндромов.

**Ответ:**  2018 = 1221 + 797

**10.2.** Можно ли на плоскости отметить 10 точек так, чтобы любые три из них были вершинами тупоугольного треугольника?

**Решение.**

Пусть имеется окружность, отметим на полуокружности (не включая граничные точки) 10 точек произвольным образом. Если соединить любые три точки, то получим тупоугольный треугольник: один из вписанных углов больше 90 градусов, т.к. опирается на дугу большую, чем 180 градусов.

**Ответ:** можно.

**Критерии:** за любой верный пример – 7 баллов

Если используется окружность, но пример не построен - 2 балла.

**10.3.** Может ли квадратное уравнение ax2+bx+ c = 0 с целыми коэффициентами иметь дискриминант равный 23?

**Решение.**

Допустим, что дискриминант указанного уравнения равен числу 23. Тогда можно записать:

b2 – 4ac = 23, и b2 – 25 = 4ac – 2 или (b – 5) ·(b + 5) = 2(2ас – 1). Заметим, что b – 5 и b + 5 – числа одинаковой чётности, поэтому их произведение, если оно чётно, делится на 4. Правая часть последнего равенства есть чётное число, не делящееся на 4. Получено противоречие, значит, сделанное допущение ложно.

**Ответ: нет.**

**Критерии:** За правильный ответ без верных обоснований – **0 баллов**

# **10.4.** Передние колёса автомобиля изнашиваются быстрее, чем задние: передние-при прохождении 10000 км, а задние – при прохождении 15000 км. Поэтому колёса периодически меняются местами. Какой максимальный путь может пройти автомобиль с данными четырьмя колёсами?

**Решение.**

**Первый способ.** На 8 парах покрышек (3 парах передних и 5 парах задних) можно проехать 75000 км. Значит, на двух парах покрышек можно проехать максимум четверть этого расстояния — 18750 км. Чтобы при этом обе пары покрышек "отработали" полностью (то есть были в одинаковом положении), их надо сменить на середине пути.

**Второй способ**. Чтобы покрышки сносились полностью одновременно (это, очевидно, самый выгодный вариант), их надо поменять на середине пути. При этом каждая износится на 3/8 в качестве передней и на 5/8 в качестве задней (25000 : 15000 = 5 : 3).  Следовательно, эта половина пути составляет 5/8·15000 = 9375 км.

**Ответ: 9375 км**

**10.5.** При входе в тайный математический клуб Петя должен каждый день называть пятизначное число такое, что сумма первых двух его цифр не должна превосходить 9, а сумма последних трех не должна превосходить 2. Если Петя скажет число, которое уже называл, его навсегда исключат из клуба. Докажите, что Петя сможет ходить в клуб больше года.

**Решение.** Поскольку первая и вторая группы цифр не пересекаются, то мы можем определить количество вариантов для каждой группы, а общее количество определить, как произведение этих чисел. Пятизначное число не должно начинаться с нуля, кроме того сумма первых двух цифр должна быть не больше 9. В первом десятке таких чисел 9: с 10 до 18. Во втором десятке на одно меньше. Можно заметить, что с увеличением числа десятков на один, количество чисел, удовлетворяющих условию в данном десятке на один уменьшается. Таким образом, общее количество двузначных чисел, сумма цифр которых не больше девяти, равно: 9 + 8 + 7 + … + 1 = 45. Сумма последних трех цифр не должна превосходить 2. Количество чисел можно легко определить и перебором – их будет 10.

Значит, количество чисел, которые Петя может использовать равно:

Отсюда делаем вывод, что Петя сможет ходить в клуб более года.

**Комментарии:** За верное определение количества чисел в каждой группе добавлять по три балла.