Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

4-5 класс

**4-5.1** В записи вместо знаков «» поставьте знаки «+» или «-» так, чтобы равенство стало верным.

**Ответ.** .

**4-5.2** Собираясь в школу, Миша нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашёл не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет?

**Ответ.** Тетрадь была под диваном, шпаргалка – на столе, плеер – под подушкой, кроссовки – под столом.

**Решение.** Плеер нашёлся не под столом, не на столе и не под диваном. Значит, он был под подушкой. Поэтому шпаргалка под подушкой лежать не могла. Но она не валялась и на полу (то есть её не было ни под столом, ни под диваном). Следовательно, она лежала на столе. Тетрадь не лежала под столом, значит, ей осталось только место под диваном. Тогда под столом могли быть только кроссовки.

**Критерии проверки.**

Правильный ответ без достаточных обоснований – 5 баллов.

**4-5.3** По какой цене за килограмм нужно продавать смесь конфет «Солнышко» и «Луна», если цена «Солнышка» 50 рублей за кг, цена «Луны» – 70, и в смеси «Луны» втрое больше, чем «Солнышка»?

**Ответ.** По 65 рублей за килограмм.

**Решение.**1 способ.На одну часть конфет «Солнышко» в смеси приходится три части конфет «Луна». Значит в одном килограмме смеси - 250 грамм конфет «Солнышко» и 750 грамм конфет «Луна».

1. 50/4 рублей = 12 рублей 50 коп –  стоит 250 грамм конфет «Солнышко»,
2. 70/4\*3 рублей = 52 рубля 50 коп – стоит 750 грамм конфет «Луна»,
3. 50/4+210/4=260/4=65 (рублей).

2 способ. На один килограмм конфет «Солнышко» в смеси приходится три килограмма конфет «Луна». Четыре килограмма смеси стоят 50+70\*3=260 (рублей). Значит один килограмм стоит 260/4=65 (рублей).

**Критерии проверки.**

Правильный ответ без достаточных пояснений – 3 балла.

**4-5.4** Придумайте фигуру из 12 клеток, которую можно разрезать как на фигурки, нарисованные слева, так и на фигурки, нарисованные справа. Не забудьте показать, как именно надо разрезать.

http://www.problems.ru/show_document.php?id=1693205

**Ответ.** Например,

 .

***Комментарий.*** Возможны и другие фигуры.

**4-5.5** К числу разрешено добавлять 3 или умножать на 2. Можно ли с помощью нескольких таких операций из 1 получить 2018?

**Ответ.** Можно.

**Решение.**

1 способ. Если решать задачу с конца, можно получить такое решение:

1→4→7→10→13→26→29→58→61→122→125→250→500→503→1006→ →1009→ 2018.

2 способ. Заметим, что 2018 при делении на 3 дает остаток 2. Тогда первым ходом из 1 получаем 2, а дальше 672 раза добавляем по 3.

**Критерии проверки.**

Любой верный пример – 7 баллов.

Догадался пойти от конца, но не смог получить решения – 3 балла.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

6 класс

**6.1** Замените в ребусе

буквы цифрами так, чтобы все равенства стали верными (одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а различным – различные). Достаточно привести одно решение.

**Ответ.** .

***Комментарий.***  Можно показать, что это решение единственное.

**6.2** Собираясь в школу, Миша нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашёл не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет?

**Ответ.** Тетрадь была под диваном, шпаргалка – на столе, плеер – под подушкой, кроссовки – под столом.

**Решение.** Плеер нашёлся не под столом, не на столе и не под диваном. Значит, он был под подушкой. Поэтому шпаргалка под подушкой лежать не могла. Но она не валялась и на полу (то есть её не было ни под столом, ни под диваном). Следовательно, она лежала на столе. Тетрадь не лежала под столом, значит, ей осталось только место под диваном. Тогда под столом могли быть только кроссовки.

**Критерии проверки.**

Правильный ответ без достаточных обоснований – 5 баллов.

**6.3** Ваня летел на самолете. Сначала он смотрел в иллюминатор, затем – обедал, потом – отдыхал, а после читал книгу. На каждое из этих занятий, кроме первого, у Вани ушло вдвое больше времени, чем на предыдущее. Начал смотреть в иллюминатор он в полдень, а закончил читать книгу в два часа дня. Сколько было времени, когда Ваня пообедал?

**Ответ.** 12:24 (12 часов 24 минуты).

**Решение.** Посмотрим сколько частей всего времени с 12.00 до 14.00 (2 часа) Ваня потратил на каждое из занятий. Смотрел в иллюминатор – 1 часть, обедал – 2 части, отдыхал – 4 части, читал книгу – 8 частей. Всего – 15 частей времени.

1) 120 мин/15=8 мин – смотрел в иллюминатор,

2) 8\*2=16 (мин) – обедал,

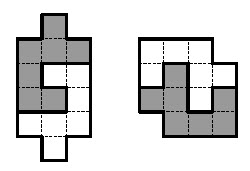
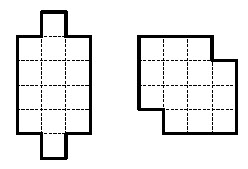
3) 16+8=24 (мин).

**6.4** Хоббиту нужно было покормить и напоить 25 гномов. Он покормил 15 гномов и напоил 14 гномов. После этого выяснилось, что ровно 5 гномов покормлены, но не напоены. Сколько гномов не покормлены и не напоены?

**Ответ.** 6.

**Решение.** Покормленных гномов 15, из них не напоенных 5. Значит, тех, которые накормлены и напоены 10, а напоенных, но не накормленных

14-10=4. Всего гномов, которые либо накормлены, либо напоены, либо и то и другое 4+5+10=19. Следовательно, не накормленных и не напоенных гномов 25-19=6.

**6.5** Покажите, как разрезать по линиям сетки фигуру, изображённую на рисунке слева, на две равные части и сложить из этих частей фигуру, изображённую на рисунке справа.

**Ответ.**

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

7 класс

**7.1** Найдите трёхзначное число такое, что если в нём стереть цифру единиц, то полученное число будет кратно 7, если стереть цифру десятков – будет кратно 11, а если стереть цифру сотен – то 13.

**Ответ.** 565.

**Решение.** Пусть искомое число . Так как  кратно 11, то . И искомое число имеет вид . Число  делится на 13, а  делится на 7. На 13 делится только семь двузначных чисел: 13, 26, 39, 42, 65, 78, 91. Только одно из них (65) после перестановки цифр делится на 7.

**7.2** Хоббиту нужно было покормить и напоить 25 гномов. Он покормил 15 гномов и напоил 14 гномов. После этого выяснилось, что ровно 5 гномов покормлены, но не напоены. Сколько гномов не покормлены и не напоены? Не забудьте объяснить свой ответ.

**Ответ.** 6.

**Решение.** Покормленных гномов 15, из них не напоенных 5. Значит, тех, которые накормлены и напоены 10, а напоенных, но не накормленных

14-10=4. Всего гномов, которые либо накормлены, либо напоены, либо и то и другое 4+5+10=19. Следовательно, не накормленных и не напоенных гномов 25-19=6.

**7.3** Школьники собирались в кино. Сначала мальчиков было 75% от числа всех участников. Но одна девочка не пришла, а вместо неё пришёл один мальчик, и тогда уже число мальчиков составило 80% от числа всех участников. Сколько мальчиков и сколько девочек пошло в кино?

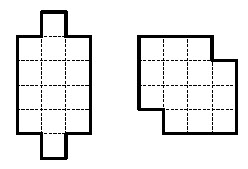
**Ответ.** 4 девочки и 16 мальчиков.

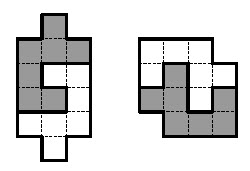
**Решение.** Пусть изначально девочек было человек, значит, всего в поход собиралось человек. А на самом деле в поход пошло девочек, а всего было человек. Но общее количество участников похода не изменилось, значит, Отсюда найдем, что . В походе же участвовало девочки, а всего участников было

человек. Тем самым мальчиков было человек.

**7.4** Карлсон за 3 минуты успевает долететь из домика до окна, схватить плюшки и вернуться в домик. Сколько метров от домика Карлсона до окна, если скорость Карлсона налегке 5 м/c, а его скорость с плюшками 4 м/с?

**Ответ.** 400 м.

**Решение.** Пусть м – искомое расстояние. Тогда , откуда =400 м.

**7.5** Покажите, как разрезать по линиям сетки фигуру, изображённую на рисунке слева, на две равные части и сложить из этих частей фигуру, изображённую на рисунке справа.

**Ответ.**

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

8 класс

**8.1** Найдите сумму цифр в десятичной записи числа .

**Ответ.** 11.

**Решение.** , .

**Критерии проверки.**

Правильный ответ – 7 баллов.

**8.2** Докажите тождество

.

**Доказательство.**

.

**Критерии проверки.**

Верно раскрыты скобки и приведены подобные только в одной из частей равенства – 2 балла.

**8.3** Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 10?

**Ответ.** Да, например 18999999999 и 19000000000.

**8.4** В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* провели биссектрису *AL*. На продолжении стороны *AC* за точку *C* отметили точку E так, что *CE = CL*. Докажите, что *AL = LE*.

**Доказательство.** По теореме о внешнем угле для треугольника *CLE*

**8.5** Двое по очереди проводят на плоскости прямые, причем дважды одну прямую проводить нельзя. Выигрывает тот, после хода которого число кусков, на которые плоскость разбита проведенными прямыми, впервые разделится на 5. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер, и как ему для этого надо играть?

**Ответ.** Второй.

**Решение.**

1 способ.Второй своим первым ходом проводит прямую, параллельную той, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную двум уже проведённым, после его хода плоскость разобьётся на 4 части. Тогда второй проводит прямую, параллельную трём проведённым, и побеждает: частей получается ровно 5. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую две уже проведённые, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и тоже побеждает, потому что частей получается 10.

2 способ. Второй своим первым ходом проводит прямую, пересекающую ту, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную одной из двух проведённых или проходящую через точку их пересечения, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и побеждает, потому что частей получается 10. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую обе проведённые в двух различных точках, плоскость разобьётся на 7 частей. Тогда второй проведёт прямую, параллельную одной из проведённых и не проходящую через точки их пересечения, и частей снова получится 10.

**Критерии проверки.**

Разобраны не все варианты ответа первого – не более 2 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

**9.1** Незнайка складывает два целых числа за столько секунд, сколько разрядов в большем из них. Ему нужно найти сумму пятнадцати следующих чисел:

30, 30, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, 320, 320, 320, 320, 320.

Помогите Незнайке сложить все числа быстрее, чем за 35 секунд.

**Решение.** Из набора 30, 30, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, 320, 320, 320, 320, 320 можно получить набор 90, 90, 80, 80, 320, 320, 320, 320, 320 за 12 секунд. Далее набор 180, 160, 640, 960 – за 2+2+3+6=13 секунд, затем набор 980, 960 – за 6 секунд и набор 1940 – за 3 секунды. Итого, потрачено 12+13+6+3=34 секунды.

**9.2** При каких и уравнению удовлетворяют два различных числа и ?

**Ответ.** и

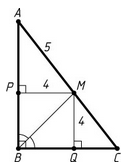
**Решение.** По теореме Виета . Из первого уравнения . Подставив во второе уравнение, получим , откуда или . Первый случай не удовлетворяет условию. Находим .

**9.3**  Для докажите, что

**Решение.**

**9.4** В прямоугольном треугольнике *ABC* биссектриса прямого угла *B* пересекает гипотенузу *AC* в точке *M*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если расстояние от точки *M* до катета *BC* равно 4, а *AM* = 5.

**Ответ.** 98/3.

**Решение.**  Пусть *P* и *Q* – проекции точки *M* на катеты *AB* и *BC*. По свойству биссектрисы *PM = MQ* = 4.

Из прямоугольного треугольника APM находим, что *AP² = AM² – PM²* = 9.

Из подобия треугольников *MQC* и *APM* находим, что

*QC = PM/AP·MQ* = 16/3.

Следовательно, *SABC =* ½ *AB·BC* = ½·(3 + 4)(4 + 16/3) = 98/3.

**9.5** Двое по очереди проводят на плоскости прямые, причем дважды одну прямую проводить нельзя. Выигрывает тот, после хода которого число кусков, на которые плоскость разбита проведенными прямыми, впервые разделится на 5. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер, и как ему для этого надо играть?

**Ответ.** Второй.

**Решение.**

1 способ.Второй своим первым ходом проводит прямую, параллельную той, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную двум уже проведённым, после его хода плоскость разобьётся на 4 части. Тогда второй проводит прямую, параллельную трём проведённым, и побеждает: частей получается ровно 5. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую две уже проведённые, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и тоже побеждает, потому что частей получается 10.

2 способ. Второй своим первым ходом проводит прямую, пересекающую ту, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную одной из двух проведённых или проходящую через точку их пересечения, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и побеждает, потому что частей получается 10. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую обе проведённые в двух различных точках, плоскость разобьётся на 7 частей. Тогда второй проведёт прямую, параллельную одной из проведённых и не проходящую через точки их пересечения, и частей снова получится 10.

**Критерии проверки.**

Разобраны не все варианты ответа первого – не более 2 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

**10.1**  Вычислите:

**Ответ.** 1.

**Решение.**

,

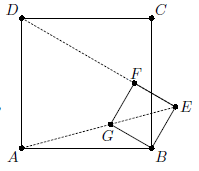
.  Таким образом, числитель равен знаменателю.

**10.2**  Для докажите, что

**Решение.**

**10.3** В каждой вершине куба написано число или число . На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны?

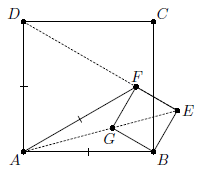
**Ответ.** Нет.

** Решение.** На каждой грани написано одно из пяти чисел: –4, –2, 0, 2, 4. Но граней всего шесть, и значит, на некоторых двух гранях будут написаны совпадающие числа.

**10.4**  Квадраты *ABCD* и *BEFG* расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки *A, G* и *E* лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки *D, F* и *E* также лежат на одной прямой.

**Решение.**   Рассмотрим треугольники *AGB* и *AGF* (рис. слева): *AG* – общая сторона,  *GB = GF*  (равные стороны квадрата *BEFG*),  ∠*AGB* = *AGF* = 135° (углы, смежные с углами *BGE* и *FGE*, равными по 45°). Следовательно, треугольники *AGB* и *AGF* равны по первому признаку. Значит, *AB = AF = AD*, ∠*GAB* = ∠*GAF* = α, ∠*GFA* = 180° – ∠*AGF* – ∠*GAF* = 45° – α.

В равнобедренном треугольнике *ADF* ∠*DAF* = 90° – 2α, ∠*DFA* = ½ (90° + 2α) = 45° + α.  Таким образом,  ∠*DFG* = ∠*GFA* + ∠*DFA* = (45° – α) + (45° + α) = 90°,  а  ∠*DFG* + ∠*EFG* = 180°.  Значит, точки *D, F* и *E* лежат на одной прямой.



**10.5** Двое по очереди проводят на плоскости прямые, причем дважды одну прямую проводить нельзя. Выигрывает тот, после хода которого число кусков, на которые плоскость разбита проведенными прямыми, впервые разделится на 5. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер, и как ему для этого надо играть?

**Ответ.** Второй.

**Решение.**

1 способ.Второй своим первым ходом проводит прямую, параллельную той, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную двум уже проведённым, после его хода плоскость разобьётся на 4 части. Тогда второй проводит прямую, параллельную трём проведённым, и побеждает: частей получается ровно 5. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую две уже проведённые, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и тоже побеждает, потому что частей получается 10.

2 способ. Второй своим первым ходом проводит прямую, пересекающую ту, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную одной из двух проведённых или проходящую через точку их пересечения, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и побеждает, потому что частей получается 10. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую обе проведённые в двух различных точках, плоскость разобьётся на 7 частей. Тогда второй проведёт прямую, параллельную одной из проведённых и не проходящую через точки их пересечения, и частей снова получится 10.

**Критерии проверки.**

Разобраны не все варианты ответа первого – не более 2 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

**11.1**  Найдите , если известно, что  и  .

**Ответ.** 68.

**Решение.**

**11.2** Сколько единиц в десятичной записи числа



(последнее слагаемое записано 2019-ю девятками)?

**Ответ.** 2016 единиц.

**Решение.**

.

**11.3** Куб и правильный тетраэдр имеют одинаковые объемы. Найдите отношение площадей их поверхностей.

**Ответ.** .

**Решение.** Куб со стороной имеет объем , а объем тетраэдра с ребром равен Откуда . Площади поверхностей куба и тетраэдра равны соответственно и Тогда

**11.4** Для углов треугольника *АВС* выполняется равенство

.

Докажите, что треугольник является равнобедренным.

**Доказательство.**

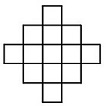
, поэтому

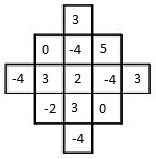
;

. Т.к. и – углы треугольника, то подходит лишь решение , получающееся при , т.к. модуль разности углов треугольника не может быть больше или равен π.

**Критерии проверки.**

Верно получено равенство – 4 балла.

**11.5** Расставьте числа в клетках изображенной на рисунке фигуры так, чтобы в любом прямоугольнике из трех клеток сумма чисел была равна 1, и сумма всех чисел была равна 1. (Достаточно привести один пример.)

**Ответ.** Например, ****.

**Критерии проверки.**

Любой верный пример – 7 баллов.

***Комментарий.***  Можно доказать, что в центре фигуры должна стоять 2.