

10 класс

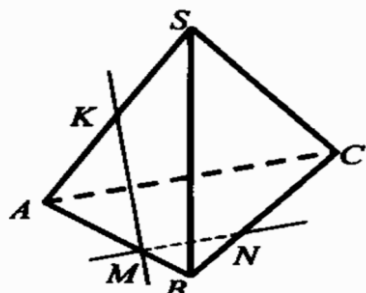
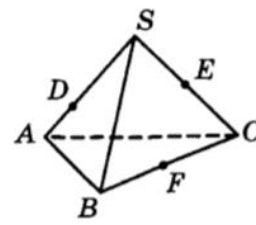
2019-2020 гг.

ГЕОМЕТРИЯ

Тема: «Аксиомы стереометрии. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей.»

Элементы содержания	Ученик научится	Ученик получит возможность научиться
Аксиомы стереометрии.	✓ Владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений.	✓ Осознавать значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки, в этой связи – принципов аксиоматического построения теоретического материала в геометрии: аксиома – теорема – свойства геометрических тел, вытекающие из них.
Параллельность прямых и плоскостей.	✓ Формулировать и доказывать геометрические утверждения.	✓ Исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах.
Перпендикулярность прямых и плоскостей.	✓ Решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия.	✓ Иметь представление об аксиоматическом методе.
Угол между двумя прямыми в пространстве.	✓ Выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач.	✓ Исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах.
Перпендикуляр и наклонные. Теорема о трех перпендикулярах.	✓ Формулировать и доказывать геометрические утверждения.	✓ Иметь представления об аксиомах стереометрии и следствий из них и применять их при решении задач.
Угол между прямой и плоскостью в пространстве.	✓ Применять теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве при решении задач.	✓ Иметь представление о скрещивающихся прямых в пространстве и находить угол и расстояние между ними.
Двугранный, трехгранный, многогранный угол. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями.	✓ Применять перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач ✓ Владеть понятием наклонные и их проекции, применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач. ✓ Владеть понятиями расстояние между фигурами в пространстве, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и применять их при решении задач. ✓ Владеть понятием угол между прямой и плоскостью и применять его при решении задач. ✓ Владеть понятиями двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярные плоскости и применять их при решении задач. ✓ В повседневной жизни и при изучении других предметов: составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.	✓ Владеть понятием геометрические места точек в пространстве и применять их для решения задач. ✓ Применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов трехгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла. ✓ Применять при решении задач формулу расстояния от точки до плоскости. ✓ Иметь представление о трехгранном и многогранном угле и применять свойства плоских углов многогранного угла при решении задач. ✓ Решать задачи на плоскости методами стереометрии, в пространстве - методами планиметрии.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)

ТЕМА	ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)
Аксиомы стереометрии.	<p>Пользуясь данным рисунком, назовите: а) четыре точки, лежащие в плоскости SAB; б) плоскость, в которой лежит прямая MN; в) прямую, по которой пересекаются плоскости SAC и SBC.</p> 
	 <p>Пользуясь данным рисунком, назовите:</p> <p>а) две плоскости, содержащие прямую DE; прямую EF; б) прямую, по которой пересекаются плоскости AEF и SBC; BDE и SAC; в) две плоскости, которые пересекает прямая SB. прямая AC.</p> <p>② Прямые a, b и c имеют общую точку. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.</p> <p>② Прямые a, b и c попарно пересекаются. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.</p> <p>③ Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение прямых a и l? Ответ объясните.</p> <p>③ Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает прямую l. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости β? Ответ объясните.</p> <p>○ 34.19. Три плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько прямых может получиться при попарном пересечении этих плоскостей?</p> <p>○ 34.20. Сколько прямых можно провести через различные пары: а) из трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек; ● г) n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?</p>

- 34.21. Сколько плоскостей можно провести через различные тройки:
- из четырех точек;
 - пяти точек;
 - n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?
- 34.22. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях:
- трех плоскостей;
 - четырех плоскостей;
 - n плоскостей?
- 34.23. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство:
- две плоскости;
 - три плоскости;
 - четыре плоскости?

2

Отрезок AB не пересекается с плоскостью α . Через концы отрезка AB и его середину — точку M — проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 и M_1 соответственно.

- Докажите, что точки A_1 , B_1 и M_1 лежат на одной прямой.
- Найдите AA_1 , если $BB_1 = 12$ см, $MM_1 = 8$ см.

36.2. Будут ли противоположные ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельны?

36.6. Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?

36.7. В пространстве даны прямая и не принадлежащая ей точка. Сколько прямых проходит через эту точку:

- параллельных данной прямой;
- не пересекающих данную прямую?

36.10. Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

36.11. Прямая лежит в плоскости. Сколько прямых, скрещивающихся с этой прямой, проходит через точку, взятую в той же плоскости?

36.12. Прямая a скрещивается с прямой b , а прямая b скрещивается с прямой c . Следует ли отсюда, что прямые a и c скрещиваются?

○ 36.13. Запишите пары параллельных ребер: а) в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; б) призме $ABCA_1 B_1 C_1$.

○ 36.14. Запишите пары скрещивающихся ребер: а) в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; б) призме $ABCA_1 B_1 C_1$;

2

Через конец A отрезка AB проведена плоскость α . Через точку M — середину отрезка AB — и точку B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках M_1 и B_1 соответственно.

- Докажите, что точки A , B_1 и M_1 лежат на одной прямой.
- Найдите BB_1 , если $MM_1 = 4$ см.

Параллельные прямые
в пространстве.

- в) тетраэдре $ABCD$;
- г) пирамиде $SABCD$.

○ 36.17. Даны две пересекающиеся плоскости. В каждой из них лежит прямая, пересекающая линию пересечения плоскостей. Определите расположение этих прямых относительно друг друга.

○ 36.18. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a , B — прямой b . Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α ; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β . Какая прямая будет линией пересечения плоскостей α и β ?

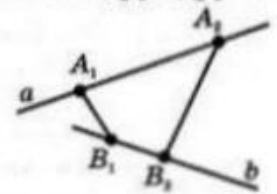
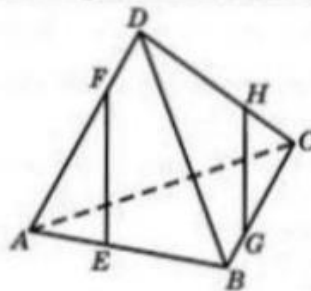


Рис. 261

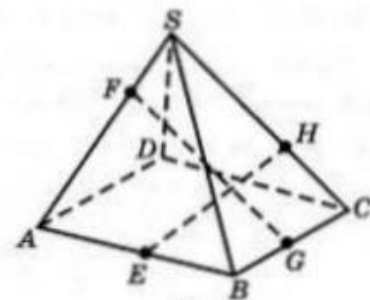
○ 36.19. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 261). Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a , точки B_1, B_2 принадлежат прямой b . Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

○ 36.20. Каково взаимное расположение прямых EF и GH (рис. 262, а)?

○ 36.21. Пересекаются ли отрезки EH и FG (рис. 262, б)?



а)



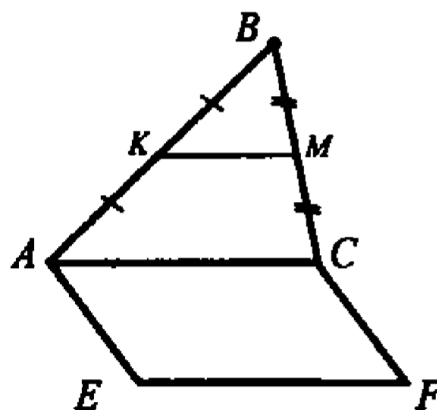
б)

Рис. 262

Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки K и M — середины отрезков AB и BC соответственно.

а) Докажите, что $KM \parallel EF$.

б) Найдите KM , если $AE = 8$ см.



Параллельность прямой и плоскости.

	<p>37.2. Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?</p> <p>37.3. Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?</p> <p>37.4. Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение о том, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?</p> <p>37.5. Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?</p>
<p>Параллельность плоскостей.</p>	<p>1) Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и C_1C, не лежащие в плоскости параллелограмма. <i>Докажите</i> параллельность плоскостей A_1AB и C_1CD.</p> <p>2) Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую в точках A_2 и B_2 соответственно. а) <i>Докажите</i>, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. б) <i>Найдите</i> $\angle A_2A_1B_1$, если $\angle A_1A_2B_2 = 140^\circ$.</p> <p>38.6. Верно ли утверждение: «Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?</p> <p>38.7. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?</p> <p>38.8. Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?</p> <p>38.9. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?</p> <p>38.10. Через всякую ли прямую можно провести плоскость, параллельную данной плоскости?</p> <p>38.11. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?</p> <p>38.12. Даны две параллельные плоскости и прямая, параллельная одной из них. Будет ли эта прямая параллельна второй плоскости?</p>

Параллельное проектирование*

39.1. В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

39.2. Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые»?

39.3. Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую»?

39.4. В пространстве задана прямая. Может ли ее параллельная проекция быть параллельной этой прямой?

39.7. Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

39.8. Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

○ 39.9. Сколько точек может получиться при проектировании двух различных точек пространства? Сделайте чертеж.

○ 39.10. Сколько точек может получиться при проектировании трех различных точек пространства? Сделайте чертеж.

○ 39.11. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Сделайте чертеж.

○ 39.12. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая? Сделайте чертеж.

○ 39.13. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки? Сделайте чертеж.

○ 39.14. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Сделайте чертеж.

○ 39.15. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

○ 39.16. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

○ 39.17. Может ли параллельная проекция отрезка быть больше (меньше) самого отрезка? Ответ обоснуйте.

○ 39.18. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен плоскости проектирования? Ответ обоснуйте.

Взаимное расположение
прямых в пространстве.

Угол между двумя пря-
мыми в пространстве.

1) -
Прямые a и b пересекаются. Прямая c является скрещивающейся с прямой a . Могут ли прямые b и c быть параллельными?

2)
Плоскость α проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ – точки M и N .

- а) Докажите, что $AD \parallel \alpha$.
б) Найдите BC , если $AD = 10$ см, $MN = 8$ см.

3)
Прямая MA проходит через вершину квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата.

- а) Докажите, что MA и BC – скрещивающиеся прямые.
б) Найдите угол между прямыми MA и BC , если $\angle MAD = 45^\circ$

4)
Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Укажите три прямые, проходящие

через точку D и скрещивающиеся с прямой AB_1 .

через точку B_1 и скрещивающиеся с прямой $A_1 D$.

Дайте обоснование ответа.

- 43.9. В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых:
а) AD и $A_1 B_1$; б) AC и $B_1 D_1$; в) AC и DD_1 .
- 43.10. Чему равен угол между пересекающимися ребрами:
а) куба; б) правильного тетраэдра?
- 43.11. Найдите угол между диагональю грани куба и пересекающимся с ней ребром.
- 43.12. Найдите угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю основания.
- 43.13. Найдите угол между пересекающимися диагоналями двух различных граней куба.

	<ul style="list-style-type: none"> ○ 43.14. Найдите угол между диагональю куба и пересекающим ее ребром куба. ○ 43.15. Дан куб $A...D_1$. Найдите углы, которые образуют прямые: <ul style="list-style-type: none"> а) AA_1 и B_1C_1; б) AA_1 и CD. ○ 43.16. В кубе $A...D_1$ найдите углы между скрещивающимися прямыми: <ul style="list-style-type: none"> а) AD и A_1C_1; б) AC_1 и DD_1; в) AB_1 и BC_1. ○ 43.17. В пирамиде, все грани которой правильные треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенными к общему ребру. ○ 43.18. В треугольной призме, боковыми гранями которой являются квадраты, найдите угол между пересекающимися диагоналями боковых граней.
--	---

<p>Перпендикулярность прямой и плоскости.</p>	<p style="text-align: center;">Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно.</p> <p>Найдите AB, если $A_1B_1 = 12$ см, $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 11$ см. Найдите A_1B_1, если $AB = 13$ см, $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см.</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ 44.13. Докажите, что в правильной призме боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. ○ 44.14. Докажите, что в кубе каждое ребро перпендикулярно двум его граням. ○ 44.15. Боковое ребро параллелепипеда перпендикулярно диагоналям основания. Докажите, что этот параллелепипед является прямым. ○ 44.16. В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых AC и B_1D. ○ 44.21. Два прямоугольных треугольника — ABC и DBC, плоскости которых не совпадают, имеют общий катет, а через два других катета — AC и CD — проведена плоскость α. <ol style="list-style-type: none"> 1) Докажите, что общий катет перпендикулярен любой прямой s плоскости α, проведенной через точку C. 2) Можно ли опустить условие о несовпадении плоскостей данных треугольников? 3) Можно ли опустить условие о том, что s проходит через точку C? ○ 44.22. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a, b, c.
--	--

Перпендикуляр и
наклонные.

Угол между прямой и
плоскостью.

1) В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK , перпендикулярная к плоскости треугольника ABC , причем $CK = 12$ см. Найдите KM . 121

2) Из точки A , не принадлежащей плоскости α , проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC . Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60^\circ$, $AO = 1,5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

3)

Из точки к плоскости α проведены две наклонные. Найдите расстояние от данной точки до плоскости, если

наклонные имеют равные длины по $3\sqrt{2}$ см, угол между ними равен 60° , а угол между их проекциями — прямой.

угол между данными наклонными равен 60° , а их проекции равны по 3 см каждая и взаимно перпендикулярны.

○ 45.15. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C . Найдите отрезок AC , если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60^\circ$.

○ 45.16. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C . Найдите отрезок AB , если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.

○ 45.17. Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Ортогональная проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите ортогональную проекцию другого отрезка.

○ 45.18. Дан прямоугольный треугольник ABC , катеты которого AC и BC равны соответственно 20 см и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α , параллельная прямой BC . Ортогональная проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите ортогональную проекцию гипотенузы.

○ 45.26. Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30° . Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Двугранный угол.

Перпендикулярность
плоскостей.

1)

Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α , а катет наклонен к этой плоскости под углом 30° . Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

2)

1

В треугольнике ABC $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Через точку B к плоскости треугольника проведен перпендикуляр BD длиной 15 см.

а) Укажите проекцию треугольника DAC на плоскость ABC .

б) Найдите расстояние от точки D до прямой AC .

1

Отрезок KA длиной 3 см — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $BD = 6$ см.

а) Укажите проекцию треугольника KBC на плоскость ромба.

б) Найдите расстояние от точки K до прямой BD .

○ 46.14. Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ заданы таким образом, что AD перпендикулярна плоскости параллелограмма, угол BCE тупой. Можно ли считать угол ACD углом между плоскостями треугольника ABC и параллелограмма $BCDE$? Постройте линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями, так, чтобы одна его сторона проходила через точку A .

○ 46.17. Дан квадрат $ABCD$, через вершину D параллельно диагонали AC проведена плоскость α , образующая с диагональю BD угол 60° . Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α ?

○ 46.23. Ребро куба равно a . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен:

а) 30° ;

б) φ .

○ 46.25. Докажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны.

○ 46.27. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) перегнули по высоте CD таким образом, что плоскости ACD и BCD образовали прямой угол. Найдите углы ADB и ACB .