

10 кл (профильный уровень)

2019-2020уч.год

Примерный банк заданий для подготовки к тестированию по математике

(учебник Никольский С.М., углублённый уровень)

Глава II: §10, п.п. 10.1 – 10.4; §11, п.п. 11.1 – 11.9

Модуль №5

"Тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения и неравенства"

ТЕМА	<i>Обучающийся научится:</i>	<i>Получит возможность:</i>
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.	<p>Определять функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики, обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, их свойства и графики. Строить графики изучаемых функций; определять их промежутки возрастания и убывания; сравнивать значения функций</p>	<p>Читать графики тригонометрических функций, свойства функций по графикам, использовать графики тригонометрических функций для решения и для отбора корней тригонометрических уравнений и неравенств.</p>
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	<p>Решать простейшие тригонометрические уравнения: определять, какие уравнения называют простейшими тригонометрическими, выбирать приемы решения тригонометрических уравнений. Узнавать уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного. Применять основные тригонометрические формулы, формулы сложения и другие формулы для решения уравнений. Применять приемы понижения кратности угла и понижения степени уравнения. Определять, какое уравнение называют тригонометрическим однородным, узнавать и решать однородные уравнения. Решать простейшие неравенства для синуса и косинуса, для тангенса и котангенса. Выбирать способы решения тригонометрических неравенств; однородных тригонометрических уравнений и неравенств; неравенств, сводящихся к простейшим заменой переменного. Вводить вспомогательный угол. Использовать замену неизвестного $t = \sin x + \cos x$.</p>	<p>Решать любые тригонометрические уравнения; применяя метод замены неизвестного, основные тригонометрические формулы для решения уравнений; отбирать корни тригонометрических уравнений согласно заданным условиям различными способами. Решать неравенства, опираясь на графики, на единичную окружность; использовать знания для построения простейших математических моделей; решать неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного.</p>

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)

ТЕМА	ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)
Тригонометрические функции	<p>1. Сравните:</p> <p>а) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\sin \frac{3\pi}{7}$; б) $\sin \left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\sin \left(-\frac{3\pi}{8}\right)$;</p> <p>в) $\sin \frac{\pi}{15}$ и $\sin \left(-\frac{7\pi}{15}\right)$; г) $\sin \frac{3\pi}{5}$ и $\sin \frac{4\pi}{5}$;</p> <p>д) $\sin \frac{7\pi}{12}$ и $\sin \frac{11\pi}{12}$; е) $\sin \frac{8\pi}{9}$ и $\sin \frac{7\pi}{9}$.</p>
	<p>2. Сравните:</p> <p>а) $\cos \frac{3\pi}{7}$ и $\cos \frac{2\pi}{7}$; б) $\cos \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{2\pi}{7}\right)$;</p> <p>в) $\cos \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{5\pi}{8}$; г) $\cos \left(-\frac{5\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{3\pi}{7}\right)$;</p> <p>д) $\cos \frac{13\pi}{12}$ и $\cos \frac{23\pi}{12}$; е) $\cos \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{5\pi}{9}$.</p>
	<p>3. Сравните:</p> <p>а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$; б) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{8}\right)$;</p> <p>в) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}$ и $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$; г) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{10}$ и $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{10}$;</p> <p>д) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12}$; е) $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)$.</p>
	<p>4. Сравните:</p> <p>а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$; б) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{ctg} \left(-\frac{6\pi}{7}\right)$;</p> <p>в) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$ и $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}$ и $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{10}$;</p> <p>д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{12}$; е) $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)$.</p>
	<p>5. <i>Расположите в порядке возрастания числа:</i></p> <p>$\cos 1,5$; $\cos(-1,3)$; $\cos \frac{3\pi}{2}$; $\cos \frac{6\pi}{5}$; $\cos(-2)$.</p>
	<p>6. Определите промежутки возрастания функции $y = \sin \frac{x}{2}$</p>
	<p>7. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos 2x$</p>
	<p>8. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{tg} 3x$</p>
	<p>9. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$</p>
	<p>10. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$</p>
	<p>11. <i>Найдите область определения и область значений функции:</i></p> <p>а) $y = \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; б) $y = \cos x + 2$; в) $y = -\operatorname{ctg} x$.</p>
	<p>12. <i>Найдите наименьший положительный период каждой из функций:</i></p> <p>а) $y = 5 \operatorname{tg} \frac{x}{3} - 1$; б) $y = \cos x \sin 5x - \sin x \cos 5x$;</p> <p>в) $y = 2 \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 - 1$.</p>
	<p>13. Определите главный период функции</p> <p>$f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.</p>

	<p>14. Определите главный период функции $f(x) = \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x$.</p> <p>15. Постройте график функции: а) $y = \sin x$; б) $y = \sin(\pi - x)$; в) $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; г) $y = \sin x$; д) $y = \sin x - 0,5$; е) $y = \sin x - 1$.</p> <p>16. Постройте график функции: а) $y = \cos x$; б) $y = \cos(\pi - x)$; в) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$; г) $y = \cos x$; д) $y = \cos x + 1$; е) $y = \cos x + 0,5$.</p> <p>17. Постройте график функции: а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$; г) $y = \operatorname{tg} x - 1$; д) $y = \operatorname{tg} x - 1$; е) $y = \operatorname{tg} x \cos x$.</p> <p>18. Постройте график функции: а) $y = \operatorname{ctg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$; в) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$; г) $y = \operatorname{ctg}(\pi - x)$; д) $y = \operatorname{ctg} x + 1$; е) $y = \operatorname{ctg} x + 1$.</p>																				
<p>Обратные тригонометрические функции</p>	<p>19. Вычислите значения аркфункций а) $\arcsin 1$; б) $\arcsin \frac{1}{2}$; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arccos(-1)$; д) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; ж) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; з) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.</p> <p>20. Вычислите значение выражений</p> <table data-bbox="446 1052 1085 1612"> <tbody> <tr> <td>1. $\arcsin 0$</td> <td>12. $\arcsin -\frac{1}{2} + \arccos 1$</td> </tr> <tr> <td>2. $\arccos 1$</td> <td>13. $\cos(\arccos 1)$</td> </tr> <tr> <td>3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$</td> <td>14. $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$</td> </tr> <tr> <td>4. $\arccos 3$</td> <td>15. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$</td> </tr> <tr> <td>5. $\arcsin(-1)$</td> <td>16. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$</td> </tr> <tr> <td>6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$</td> <td>17. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$</td> </tr> <tr> <td>7. $\operatorname{arctg} 0$</td> <td>18. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$</td> </tr> <tr> <td>8. $\operatorname{arctg} 1$</td> <td>19. $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$</td> </tr> <tr> <td>9. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>10. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>21. Найдите значение выражения: а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-1)$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.</p> <p>22. Вычислите: а) $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $3 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$;</p>	1. $\arcsin 0$	12. $\arcsin -\frac{1}{2} + \arccos 1$	2. $\arccos 1$	13. $\cos(\arccos 1)$	3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	14. $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	4. $\arccos 3$	15. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$	5. $\arcsin(-1)$	16. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$	6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	17. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$	7. $\operatorname{arctg} 0$	18. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$	8. $\operatorname{arctg} 1$	19. $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$	9. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$		10. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	
1. $\arcsin 0$	12. $\arcsin -\frac{1}{2} + \arccos 1$																				
2. $\arccos 1$	13. $\cos(\arccos 1)$																				
3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	14. $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$																				
4. $\arccos 3$	15. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$																				
5. $\arcsin(-1)$	16. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$																				
6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	17. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$																				
7. $\operatorname{arctg} 0$	18. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$																				
8. $\operatorname{arctg} 1$	19. $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$																				
9. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$																					
10. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$																					

33. **B7** Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x-1)}{3} = \sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.
34. *Решите уравнение:*
 а) $2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$; б) $-2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) = 1$;
 в) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = -1$; г) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} - 4x \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
35. а) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = 1$;
 в) $\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}$;
 г) $\sin \frac{x}{3} \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
36. Решите уравнения:
 а) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$.
 а) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$;
 б) $\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.
 а) $\sin x = -0,6$; б) $\cos x = \frac{2}{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -4$.
37. Решите уравнения:
 а) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; б) $3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$.
 а) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$;
 б) $\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.
 а) $\cos x = -0,7$; б) $\sin x = \frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg} x = 5$.
38. Решите уравнение (1–5).
 1. $\cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. $\sin^2 x - 5 \sin x - 6 = 0$.
 3. $3 \cos^2 \pi x + 4 \cos \pi x - 7 = 0$. 4. $\operatorname{tg} x + \frac{4}{3 \operatorname{tg} x + 2} + 5 = 0$.
 5. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - 9 \operatorname{ctg} x - 9 = 0$.
39. Решите уравнение (1–5).
 1. $2 \sin^2 \pi x - \cos \pi x - 1 = 0$. 2. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos 2x = 0,5$.
 3. $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$. 4. $\cos(1,5\pi + 2x) - \cos x = 0$.
 5. $\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) \cos x + \sin \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
40. Решите уравнение (1–4).
 1. $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.
 2. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 0$.
 3. $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.
 4. $2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = -1$.
41. Решить однородные тригонометрические уравнения:
 а) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$;
 б) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
 в) $9 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 2 \sin^2 x$;
 г) $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$.

Тригонометрические неравенства	42.	Решите неравенства: а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.
	43.	а) $2 \cos x - 1 \geq 0$; б) $2 \sin x + \sqrt{2} \geq 0$; в) $2 \cos x - \sqrt{3} \leq 0$; г) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$.
	44.	а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$.
	45.	а) $\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$; б) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
	46.	а) $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; б) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$; в) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geq 1$; г) $2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.
	47.	а) $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$; в) $\operatorname{ctg} 3x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$.
	48.	$2 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x > 2$.
	49.	$4 \cos^2 x - (2\sqrt{2} - 2) \sin x > 4 - \sqrt{2}$.
	50.	а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}$; б) $\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ЧАСТЬ 2.

Тригонометрические уравнения с отбором корней (аналог №13 профильного ЕГЭ)	51.	а) Решите уравнение: $\sin x + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$ б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; 2\pi\right]$.
	52.	а) Решите уравнение $4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x = 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
	53.	а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5 = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.
	54.	а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{121}\right)^{\cos x} = 11^{2 \sin 2x}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
	55.	а) Решите уравнение $\sin^2 x + \sin 2x = 1$; б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
	56.	а) Решите уравнение: $\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.