9.2.2 (технологический профиль)
2019-2020 уч.год
Примерный банк заданий для подготовки к тестированию по математике (учебник Макарычев Ю.Н., углублённый уровень)

Модуль №4
"Уравнения и неравенства с одной и с двумя переменными. Системы уравнений и неравенств"

В тесте проверяются теоретическая и практическая части.

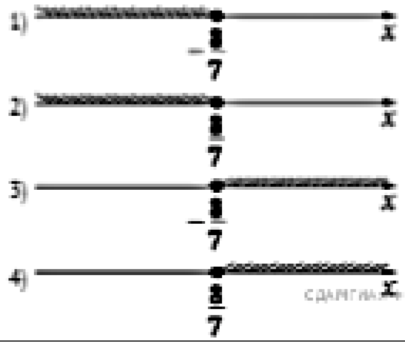
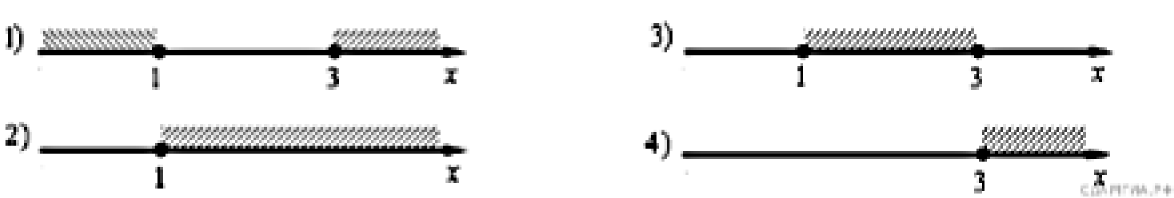
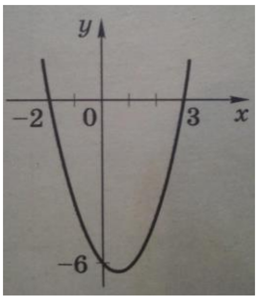
Тема №1. "Уравнения и неравенства с одной переменной"

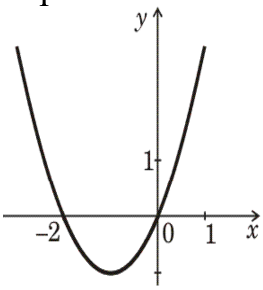
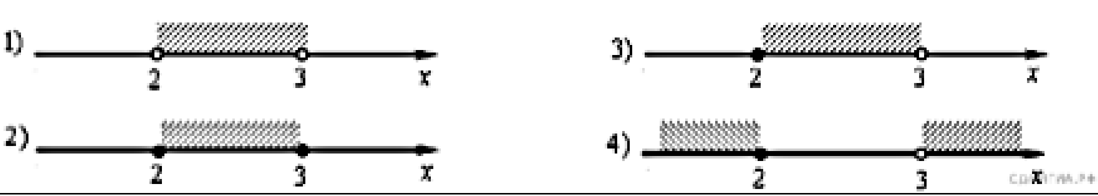
Элементы содержания	Предметные умения
Глава 2 **§ 4. Уравнения с одной переменной.** П.9. Целое уравнение и его корни. П.10. Приемы решения целых уравнений. П.11. Решение дробно-рациональных уравнений.	Умения определять целые уравнения, находить их степень; доказывать, что уравнение не имеет целых корней или находить эти корни; решать целые уравнения, выше второй степени, разложением на множители, с помощью замены переменной и графическим методом; решать дробно-рациональные уравнения.
§ 5. Неравенства с одной переменной. П.12. Решение целых неравенств с одной переменной. П.13. Решение дробно-рациональных неравенств с одной переменной.	Умения решать неравенства первой степени, неравенства второй степени с помощью параболы, неравенства второй и более высоких степеней методом интервалов; решать дробно-рациональных уравнений методом интервалов.
§ 6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля. П.14. Решение уравнений с переменной под знаком модуля. П.15. Решение неравенств с переменной под знаком модуля.	Умения решать уравнения с одной переменной под знаком модуля; решать неравенства с одной переменной под знаком модуля с помощью геометрического смысла модуля, с помощью определения модуля (методом промежутков), графическим способом, заменой переменной и заменой неравенства равносильной системой или совокупностью.
§ 7. Уравнения с параметрами. П.16. Целые уравнения с параметрами. П.17. Дробно-рациональные уравнения с параметрами.	Умения решать линейные, квадратные, биквадратные, дробно-рациональные, а также уравнения, содержащие модуль, с параметром.

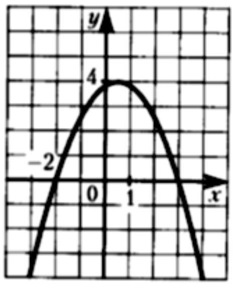
Примерные практические задания:

1.	Выберите **верные** утверждения: 1) Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого – целые выражения. 2) Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая часть которого – целое выражение. 3) Степенью уравнения вида $P(x) =$, где $P(x) -$ многочлен стандартного вида, называется степень этого многочлена. 4) Степенью уравннния вида $P(x) = 0$, называется степень многочлена, стоящего на первом месте. 5) Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором все коэффициенты – целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена. 6) Если число a является корнем многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$, то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x-a)P_1(x)$, где $P_1(x) -$ многочлен $(n-1) -$ й степени. 7) Если число a является корнем многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$, то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x+a)P_1(x)$, где $P_1(x) -$ многочлен $(n-1) -$ й степени.
2.	Является ли данное уравнение целым: а) $\frac{x^3-6x}{8} - \frac{x^5}{3} = 1$; б) $\sqrt{x-1} = 19$; в) $\frac{x^2-1}{x-1} - 18x = 4$; г) $1{,}07x^2 - \frac{1}{3}x = 0{,}1$; д) $\frac{1}{3}x^3 = \sqrt{2}x$; е) $\frac{6}{x+1} - 6x = 2$; ж) $\frac{12x^3-2}{0{,}3} = 0{,}1x$; з) $\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = x + 4$; и) $\frac{22}{\sqrt{x}} = x^3 - 1$; к) $\frac{x}{\sqrt{5}} = 2x^4 - x^6$?
3.	Укажите степень уравнения $x^2(5x^3 - 2x^2) + 8 - 5x^5 + x^3 = 0$. 1) 3 2) 5 3) 4 4) 2
4.	Найдите степень уравнения: $5x^2 - 7x^6 + 8 = x(x^7 + 2x^2)$.
5.	Корнями какого уравнения являются числа −2; 0; 2? 1) $x^3 - 4x = 0$ 2) $x(x^2 - 4x + 4) = 0$ 3) $x^3 - 2x = 0$ 4) $x^3 - 4x + 4 = 0$
6.	Имеет ли целые корни уравнение: а) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$; б) $x^6 - x^4 + x^2 + x - 2 = 0$?
7.	Решите уравнение $-(x-2)^2 + 3 = x - 1$. 1) (0; −1), (3; 2) 2) −1; 2 3) 0; 3 4) (3; 2)

8.	Решите уравнение: $(2x-5)(2x+5)-2x(3+2x)=5.$
9.	Решите уравнение: $x^2+4-4x^3-16x=0.$
10.	Решите уравнение: $x^5+x^4-6x^3-6x^2+8x+8=0$;
11.	Найдите сумму квадратов корней уравнения: $2x^3-72x=0.$
12.	Решите уравнение: *а)* $x^6-36=0;$ *б)* $-x^5-7=0$
13.	Сколько корней имеет уравнение $(x-1)^2-5=\frac{2}{x}$ (используйте графическую интерпретацию)?
14.	Найдите нули функции $f(x)=x^4+8x^2-9$. 1) 1; 3 2) −1; −3 3) −3; −1; 1; 3 4) −1; 1
15.	Решите уравнение: $x^4-12x^2-64=0.$
16.	**Решите уравнение $(x^2+1)^2-6(x^2+1)+5=0$.** 1) −2; 0; 2 3) −2; 2 2) $-\sqrt{5}$; −1; 1; $\sqrt{5}$ 4) −2; −1; 1; 2
17.	Решите уравнение: $(x^2-10)^2+12(x^2-10)+11=0.$
18.	Решить уравнения: **а)** $(x^2+4x)^2-(x+2)^2=416$; **б)** $(x^2-2x)^2+(x-1)^2=73$; **в)** $(x^2+6x)^2-4(x+3)^2=156$; **г)** $3(x^2+2x)^2=35(x+1)^2+115$.
19.	Решите возвратное уравнение: **а)** $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$; б) $4x^4-8x^3-37x^2-8x+4=0$
20.	Зная, что один из корней уравнения $4x^4-12x^3+13x^2-12x+a=0$ равен 2, найдите a и другие корни уравнения.
21.	При каких значениях p уравнение $x^2+px+3=0$ имеет ровно два корня? 1) $(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ 3) $(-\infty;-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3};\infty)$ 2) $(-2\sqrt{3};2\sqrt{3})$ 4) $(2\sqrt{3};\infty)$
22.	Решите уравнение: *а)* $\lvert x-2\rvert=3$. *б)* $\lvert x^2-2x-4\rvert=4$. *в)* $\lvert x^2+2x-1\rvert=\lvert x+1\rvert$. *г)* $\lvert x^2-4x+3\rvert=2x-5$. *д)* $x^2-4\lvert x-3\rvert-2x-7=0$. *е)* $\lvert x+1\rvert+\lvert x-4\rvert=5$.
23.	Найдите наибольший корень уравнения: *а)* $\lvert x^2-5x+4\rvert=4$ *б)* $\lvert x^2-2x-4\rvert=3x-2.$
24.	При каких значениях параметра a уравнение $x^2-(3a-1)x+2a^2-a=0$ имеет один корень?
25.	Решите уравнение: *а)* $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}=\frac{x^2+5x+2}{x^2+2x-3}$ *б)* $\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2-15=16\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2.$
26.	Выберите <u>**верные**</u> утверждения:

	1) Неравенство с одной переменной, обе части которого являются рациональными вражениями, называется рациональным неравенством. 2) Неравенство с одной переменной, левая часть которого является рациональным вражением, называется рациональным неравенством. 3) Если в рациональном неравенстве левая и правая части – целые выражения, то такое неравенство называется целым неравенством. 4) Если в рациональном неравенстве левая часть – целое выражение, то такое неравенство называется целым неравенством. 5) Неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ равносильно неравенству $P(x)Q(x) > 0$. 6) Неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ равносильно неравенствам $P(x) > 0$ и $Q(x) > 0$. 7) Неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x)Q(x) < 0; \\ \frac{P(x)}{Q(x)} = 0. \end{cases}$ 8) Неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$ равносильно неравенству $P(x)Q(x) \le 0$.
27.	На каком рисунке изображено множество решений неравенства $4-7(x+3) \le -9$? 
28.	На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2-4x+3 \ge 0$? *В ответе укажите номер правильного варианта.* 
29.	На рисунке изображен график функции $y = x^2 - x - 6$. Используя график, решите неравенство $x^2 - x - 6 > 0$. 

30.	На рисунке изображен график функции $y = x^2 + 2x$. Используя график, решите неравенство $x^2 + 2x < 0$. 
31.	Решите неравенство: *а)* $x^2 - 11x + 24 < 0$; *б)* $2x^2 + 11x - 6 > 0$; *в)* $-9x^2 + 12x - 4 > 0$; *г)* $-7x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$; *д)* $0{,}1x^2 + x - 2{,}4 \leqslant 0$; *е)* $-2x^2 - 4x - 6 \geqslant 0$.
32.	Найдите множество решений неравенства: **а)** $7x(7x - 4) + 2(7x + 2) \geqslant 0$; **б)** $3p(p - 2) < 2p(p + 4) - (p - 16)$
33.	Решите неравенство $x^2 + x \geq 0$. *В ответе укажите номер правильного варианта.* 1) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ 2) $[-1; 0]$ 3) $(-1; 0)$ 4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$
34.	Решите неравенство $x^2 - 4x - 4 > 0$. 1) $(-\infty; -5] \cup (1; \infty)$ 2) $(-1; 5)$ 3) $(-5; 1)$ 4) $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$
35.	**Решите неравенство** $(5x - 2)(2 - x) \geqslant 0$. 1) $[2; 2{,}5]$ 2) $[0{,}4; 2]$ 3) $(-\infty; 0{,}4] \cup [2; \infty)$ 4) $(0{,}4; 2)$
36.	Решите неравенство: $(x + 2)(1 - x)(4x - 10) \leq 0$.
37.	Решите неравенство: $\frac{x-2}{3-x} \geq 0$ На каком из рисунков изображено множество его решений? *В ответе укажите номер правильного варианта.* 
38.	Решите неравенства: *а)* $(x - 0{,}3)(6x - 1)(5 - 2x) > 0$; *б)* $(2x - 7)(x + 6)(4 - x) \leqslant 0$; *в)* $x^2(x + 3)(3 - 2x) > 0$; *г)* $x(2x + 3)(x - 1{,}6)^2 > 0$.
39.	Найдите множество решений неравенств: **а)** $7x^3 - 2x^2 - 28x + 8 > 0$; **б)** $x^3 + 6x^2 - x - 6 < 0$;
40.	

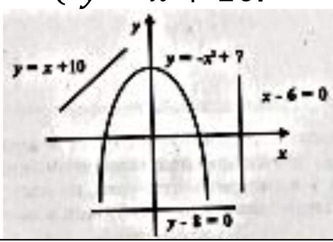
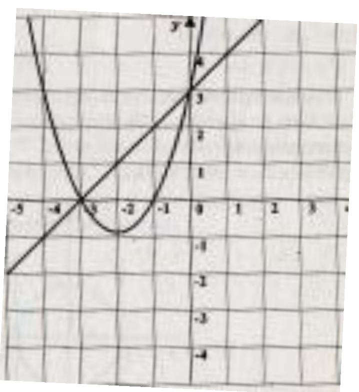
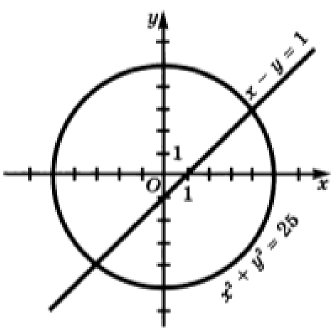
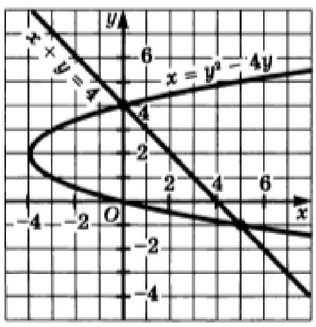
	Решите неравенство: а) $(x-8)^2(x^2-3x+4) > (x-8)^2(x+1)$; б) $(2x-3)^4(x^2-x) > (x-1)(2x-3)^4$; в) $(x^2-4x+4)(x^2-1) < (x-2)^2(x+5)$; г) $(x+6)^2(x^2+x-1) < (x^2+3x)(x+6)^2$.
41.	**Функция $f(x) = ax^2+bx+c$ задана графически (рис. 5), D — дискриминант соответствующего квадратного трехчлена. Какое из высказываний верно?**  Рис. 5 1) $a > 0,\ D > 0$ 2) $a > 0,\ D < 0$ 3) $a < 0,\ D < 0$ 4) $a < 0,\ D > 0$
42.	**Решите неравенство $f(x \geqslant 0)$ (рис. 5).** 1) $(-\infty; -2] \cup [3; \infty)$ 2) $(-2; 3)$ 3) $[-2; 3]$ 4) $(-\infty; 4]$
43.	Решите неравенства: а) $\dfrac{x^3-5x^2+3x-15}{x^2+4x-12} > 0$. б) $\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2(x^2-9)} < 0$. в) $\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{(x+5)(x-7)} \geqslant 0$.
44.	Решите двойное неравенство: а) $3 \leqslant \dfrac{5x-1}{2x-3} \leqslant 5$. б) $2 < \dfrac{3x-8}{x+1} < 3$; в) $-1 < \dfrac{x-8}{x+1} < 3$; г) $1 \leqslant \dfrac{4+x}{3x+2} \leqslant 2$.
45.	Решить систему неравенств: а) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x-4} > \dfrac{x+3}{x-1}, \\ 3x-7 > x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+2} \leqslant \dfrac{2x+1}{x}, \\ 3(2-x) \geqslant 7x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{3x} \geqslant \dfrac{2x}{x+4}, \\ 13-12x > x. \end{cases}$
46.	Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} x^2-2x-48 < 0, \\ 3x-6 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9y^2-30y+25 > 0, \\ 0{,}2y-0{,}1 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 1{,}4x^2, \\ 9x^2+5x-4 < 0. \end{cases}$
47.	Решите неравенство: а) $\|x+1\| < 5$. б) $\|x^2-5x\| > 6$. в) $\|x^2-5x-6\| < x+10$. г) $\|x^2-7x+6\| > x^2+x-2$. д) $\|x^2-x\| < \|x-10\|$. е) $\|x+1\|+\|x+4\| < 5$.
48.	Решите неравенство: $x^2+\|x\|-2 < 0$.
49.	**Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{2x^2-x-1}$.** 1) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$ 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; \infty)$ 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

Тема №2. "Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными"

Элементы содержания	Предметные умения
Глава 3. **§ 8. Уравнения второй степени с двумя переменными и их системы.** П.18. Уравнение с двумя переменными и его график. П.19. Система уравнений с двумя переменными. П.20. Решение систем уравнений с двумя переменными способом подстановки и способом сложения. П.21. Другие способы решения систем уравнений с двумя переменными. П.22. Решение задач.	Умения определять степень уравнения с двумя переменными, строить графики уравнений второй степени с двумя переменными; решать системы уравнений с двумя переменными разными способами; решать системы, содержащие однородные и симметрические многочлены, используя замену $x + y = a, xy = b$; составлять систему уравнений по условию задачи.
§ 9. Неравенства с двумя переменными и их системы. П.23. Линейное неравенство с двумя переменными. П.24. Неравенство с двумя переменными степени выше первой. П.25. Система неравенств с двумя переменными. П.26. Неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля.	Умения строить график линейного неравенства с двумя переменными; строить график неравенства с двумя переменными степени выше первой; изображать в координатной плоскости множество решений системы неравенств с двумя переменными и содержащих переменную под знаком модуля.

Примерные практические задания:

1.	Выберите **верные** утверждения: 1) Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство. 2) Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными уравнениями. 3) Два уравнения, имеющие одно равное решение, называют равносильными уравнениями. 4) Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство. 5) Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости. 6) Пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными в верное равенство, называется решением системы. 7) Пара значений переменных, называется решением системы.
2.	

	Какая из перечисленных пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} x - y = 5; \\ 3x - y^2 = -3. \end{cases}$ *а)* $(2;3)$ *б)* $(-3;2)$ *в)* $(-6;11)$ *г)* $(8;3)$.
3.	Сколько решений уравнения $(x+3)^2 - y^2 + 3y = 0$ находится среди пар чисел $(-3;3)$; $(-1;-2)$; $(0;0)$; $(-3;0)$.
4.	Укажите значение суммы $x_1 + y_1$, где $(x_1; y_1)$ − решение системы $\begin{cases} x + y = 4; \\ x - 2y = 1. \end{cases}$
5.	Укажите значение произведения $x_1 \cdot y_1$, где $(x_1; y_1)$ − решение системы $\begin{cases} x + y = 4; \\ y^2 - x^2 = 8. \end{cases}$
6.	Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} y = \frac{2}{x}; \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$ (воспользуйтесь графической интерпретацией).
7.	На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите, сколько решений имеет каждая система: *а)* $\begin{cases} y = -x^2 + 7; \\ y = x + 10. \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} y = -x^2 + 7; \\ x - 6 = 0. \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} y = -x^2 + 7; \\ y - 8 = 0. \end{cases}$ 
8.	Найдите значение выражения xy, если $(x;y)$ − решение системы $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}; \\ x + y = 12. \end{cases}$
9.	*а)* На рисунке 1 изображены графики функций $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = x + 3$. Используя графики, решите систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3; \\ y = x + 3. \end{cases}$ *б)* Решите систему уравнений, используя графики функций: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ x - y = 1. \end{cases}$ *в)* Решите систему уравнений, используя графики функций: $\begin{cases} x = y^2 - 4y \\ x + y = 4 \end{cases}$    *рис. 1.*
10.	Какая фигура является графиком уравнения:

	а) $2x = 5 + 3y$; г) $(x + 1{,}5)(x - 4) = 0$; б) $6x^2 - 5x = y - 1$; д) $xy - 1{,}2 = 0$; в) $2(x + 1) = x^2 - y$; е) $x^2 + y^2 = 9$?
11.	Постройте график уравнения: *а)* $3x - 5y - 15 = 0$; *б)* $(x + 3)(y - 5) = 0$; *в)* $xy + 12 = 0$; *г)* $x^2 + y^2 = 16$; *д)* $x^2 - 2\|x\| - y = 0$; *е)* $3\|y\| + x^2 = 0$. *ж)* $(x - 3)^2 + y^2 = 9$; *з)* $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; *и)* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; *к)* $x = y^2 + 2y - 8$. *л)* $9x^2 + y^2 = 4$; *м)* $3xy = 12$; *н)* $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 4$; *о)* $\frac{1}{2}xy = 6$.
12.	Решить систему уравнений методом подстановки: *а)* $\begin{cases} 2x^2 + x - 3y - 16 = 0, \\ y - x^2 + 6 = 0. \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + x + 16 = 0, \\ x - 2y + 7 = 0. \end{cases}$
13.	Решите систему методом сложения: *а)* $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + x = -6, \\ x^2 - 3y^2 = -11. \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x^2 - 3y^2 - y = -6, \\ 2x^2 - 3y^2 = -4; \end{cases}$
14.	Решите систему уравнений: *а)* $\begin{cases} 9x^2 - y^2 - 3x + y = 0, \\ x^2 + y = xy. \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} xy = -2, \\ (x - y)^2 + x + y = 10; \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y = 1, \\ x^2 + xy - 6y^2 = 0; \end{cases}$
15.	Выберите **верные** утверждения: 1) Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное неравенство. 2) Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных. 3) Линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, где x и y - переменные, a, b и c - некоторые числа. 4) Линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by < c$, где x и y - переменные, a, b и c - некоторые числа. 5) Функция с областью определения X и областью значений Y называется обратимой, если обратное ей соответствие между множеством Y и множеством X – функция. 6) Если функция $f(x)$ обратима, то обратное ей соответствие называют функцией, обратной функции $f(x)$. 7) Если функция $f(x)$ обратима, то обратное ей соответствие называют функцией.
16.	Является ли пара чисел $(2; -1)$ решением неравенства $2x^2 + xy - 3y^2 < 3$?
17.	Является ли пара чисел $(2; -1)$ решением системы неравенств $\begin{cases} xy > -6; \\ x^2 + xy + y^2 < 7? \end{cases}$
18.	Изобразите график неравенства: а) $4x - 5y > 20$; в) $2x - y < -3$; б) $3x + 4y < 12$; г) $2x + 3y > -5$.

19.	Изобразить на координатной плоскости множество решений системы: *а)* $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9, \\ x - y > 0. \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x + y \leqslant 3, \\ 4x - 5y \leqslant 20. \end{cases}$ *в)* $\begin{cases} x - 2y \leqslant 4, \\ 0{,}5x - y \geqslant -2. \end{cases}$ *г)* $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4, \\ x^2 + y^2 - 6x \leqslant 0. \end{cases}$
20.	Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств $\begin{cases} 1 \leq \lvert x \rvert \leq 3; \\ 2 \leq \lvert y \rvert \leq 3. \end{cases}$