

## Модуль 4: «Первообразная. Интегралы»

(учебник Калягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.)

Учащиеся должны знать/понимать:

Понятие первообразной. Какую функцию называют первообразной для функции  $y = f(x)$  на интервале  $(a; b)$ .

Свойства первообразных. Формулы первообразных элементарных функций.

Определение неопределенного интеграла, символику и обозначение неопределенного интеграла.

Что называют интегрированием функции. Определенный интеграл.

Символику и обозначение определенного интегралов.

Основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла.

Понятие и виды криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции.

Формула Ньютона - Лейбница. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах.

Уметь:

Находить первообразные и вычислять интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования. Вычислять определенные интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования.

Использовать основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла при решении задач.

Узнавать и строить криволинейные трапеции, распознавать их виды.

Строить в координатной плоскости фигуры, ограниченные графиками функций.

Вычислять площади криволинейных трапеций, фигур, ограниченных графиками заданных функций с помощью определенного интеграла, формулы Ньютона-Лейбница.

Находить площадь круга, объем тел вращения, работу, массу стержня переменной плотности, работу электрического заряда, давление жидкости на стенку, центр тяжести с помощью определенных интегралов.

Решать задачи с использованием первообразной и интеграла:

№	Элементы содержания задания	Ответ
<b>Часть 1. (Каждое задание оценивается в 1 балл)</b>		
1.	Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ , если:	
	1. $F(x) = 3x^3 + 5x^2 + \operatorname{tg} x - 8$ и $f(x) = 9x^2 + 10x + \frac{1}{\cos^2 x}$ , $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ ;	
	2. $F(x) = 6x^5 + \ln 6x$ и $f(x) = 30x^4 + \frac{1}{x}, x > 0$ .	
	3. $F(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ и $f(x) = 3x^2 + 8x - 5, x \in \mathbf{R}$ ;	
	4. $F(x) = 2x^5 + e^x$ и $f(x) = 10x^4 + e^x, x \in \mathbf{R}$ .	
	5. $F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 9x + 15$ и $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 9 (x \in \mathbf{R})$ ;	
	6. $F(x) = \frac{3}{x^2} - 5x - \sin x - 10$ и $f(x) = -\frac{6}{x^3} - 5 - \cos x (x \neq 0)$ .	
7. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4), f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ ;		
2.	Укажите общий вид первообразных для функций:	

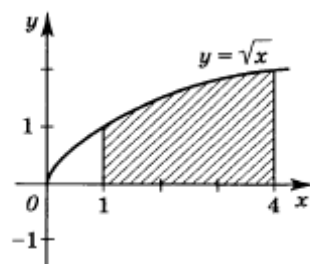
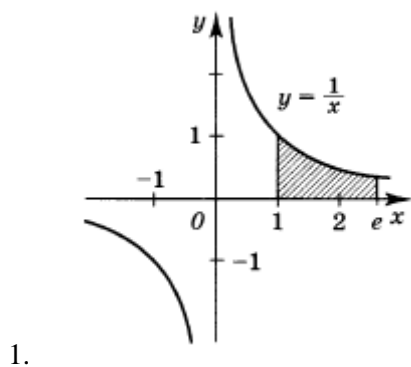
1.	$f(x) = x^4 + 3x.$ <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F(x) = \frac{x^5}{5} + 6x^2</math></li> <li>2. <math>F(x) = 4x^3 + 3 + C</math></li> <li>3. <math>F(x) = 4x^3 + 3</math></li> <li>4. <math>F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} + C</math></li> </ol>	
2.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + \sqrt{3}.$ <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}</math></li> <li>2. <math>F(x) = 3x^2 + 6x - 2 + C</math></li> <li>3. <math>F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + C</math></li> <li>4. <math>F(x) = 3x^2 + 6x - 2</math></li> </ol>	
3.	<p>Найдите первообразную для функции <math>f(x) = x + \cos x</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C</math></li> <li>2. <math>F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + C</math></li> <li>3. <math>F(x) = x^2 + \cos x + C</math></li> <li>4. <math>F(x) = 2 - \cos x + C</math></li> </ol>	
4.	<p>Найдите первообразную для функции <math>f(x) = 3x^2 - \sin x</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F(x) = x^3 - \cos x + C</math></li> <li>2. <math>F(x) = 2x + \sin x + C</math></li> <li>3. <math>F(x) = x^3 + \cos x + C</math></li> <li>4. <math>F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C</math></li> </ol>	
5.	<p>Найдите первообразную для функции <math>f(x) = e^x - x^3</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F(x) = e^x - \frac{x^4}{4} + C</math></li> <li>2. <math>F(x) = e^x - 3x^2 + C</math></li> <li>3. <math>F(x) = e^{x-1} - 3e^2 + C</math></li> <li>4. <math>F(x) = e^x - x^4 + C</math></li> </ol>	
6.	<p>Найдите первообразную для функции <math>f(x) = e^x + 12</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>F(x) = e^x + C</math></li> <li>2. <math>F(x) = e^{x-1} + C</math></li> <li>3. <math>F(x) = e^x + 12x + C</math></li> <li>4. <math>F(x) = e^x + 12 + C</math></li> </ol>	
Найдите общий вид первообразных и для заданной функции:		
3.	1.	$y = \frac{5}{x} + \sin x, x \neq 0$
	2.	$y = 6 \cos x$
	3.	$y = \frac{7}{x^2}, x \neq 0$
	4.	$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

	5.	$y = -13 \sin x + \frac{5}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2}, n \in Z$	
	6.	$y = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x} - 6^x, x \neq \pi, n \in Z$	
	7.	$y = \sqrt{2x} - x^5 + \frac{3}{x}, x \neq 0$	
	8.	$y = \sqrt[5]{x} - 2e^x$	
	9.	$y = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, x \neq \pi, n \in Z$	
	10.	$y = x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4}, x > 0$	
	Найдите общий вид первообразных для заданной функции:		
4.	1.	$y = e^{5x+2}$	
	2.	$y = \sin(4x-7)$	
	3.	$y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$	
	4.	$y = -\frac{1}{(6x+1)^2}$	
	5.	$y = \frac{1}{\sqrt{7x-9}}$	
	6.	$y = \sin^2 x + \cos^2 x$	
	7.	$y = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$	
	Для функции $f(x)$ найдите ту первообразную, которая проходит через точку $M(x;y)$		
5.	1.	$f(x) = 5e^x, M(0;14)$	
	2.	$f(x) = -9 \cos x, M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$	
	3.	$f(x) = -4x^3 + \frac{1}{x^2}, M(1;2)$	
	Найдите неопределенный интеграл:		
6.	1.	$\int \frac{-10}{\sqrt{5x-4}} dx$	
	2.	$\int (\cos 2x - \sin 3x) dx$	
	3.	$\int \sqrt{6-5x} dx$	
	Вычислить определенные интегралы:		
7.	1.	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{-5x+6}$	

2.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	
3.	$\int_{-1}^2 x^4 dx$	
4.	$\int_2^8 2 dx$	
5.	$\int_{-8}^0 \frac{3x}{4} dx$	
6.	$\int_0^e \frac{3 dx}{x}$	
7.	$\int_{-1}^4 (x^2 - x + 4) dx$	
8.	$\int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx$	
9.	$\int_0^1 ((x-2)^3 + 3(x-1)^2) dx$	

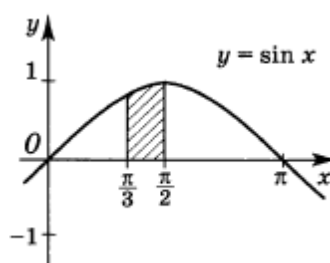
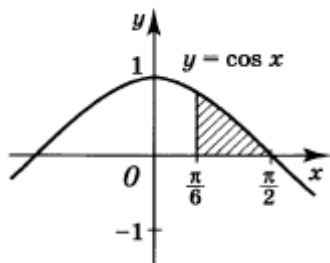
Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры:

8.



1.

2.



3.

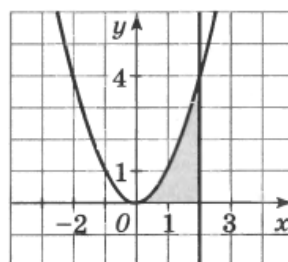
4.

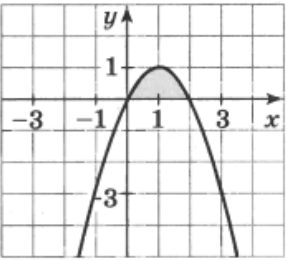
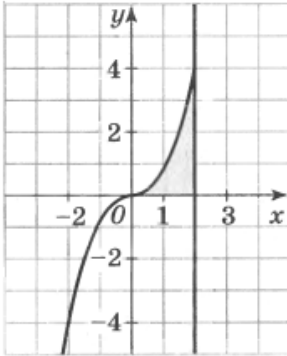
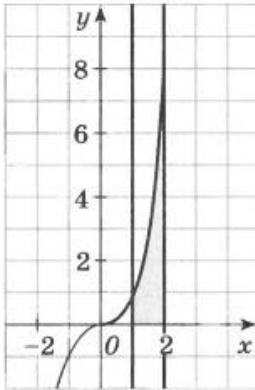
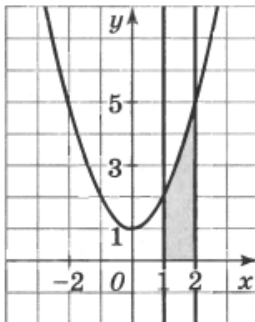
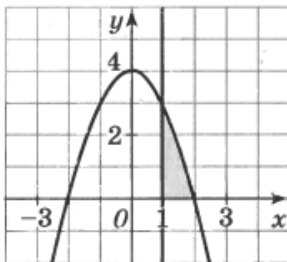
Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

9.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$  и  $x = 2$ .

1. 2
2.  $2\frac{2}{3}$
3. 4
4.  $2\frac{1}{3}$



2.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями <math>y = 2x - x^2</math> и <math>y = 0</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 1</li> <li>2. <math>1\frac{2}{3}</math></li> <li>3. <math>1\frac{1}{3}</math></li> <li>4. <math>1\frac{1}{2}</math></li> </ol>	
3.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями <math>y = 0,5x^3</math>, <math>y = 0</math> и <math>x = 2</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 2</li> <li>2. 1,5</li> <li>3. 2,5</li> <li>4. 2,2</li> </ol>	
4.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями <math>y = x^3</math>, <math>y = 0</math>, <math>x = 1</math> и <math>x = 2</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 4</li> <li>2. <math>3\frac{3}{4}</math></li> <li>3. <math>4\frac{1}{4}</math></li> <li>4. <math>2\frac{1}{4}</math></li> </ol>	
5.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями <math>y = x^2 + 1</math>, <math>y = 0</math>, <math>x = 1</math> и <math>x = 2</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 3</li> <li>2. <math>3\frac{2}{3}</math></li> <li>3. 3,5</li> <li>4. <math>3\frac{1}{3}</math></li> </ol>	
6.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями <math>y = 4 - x^2</math>, <math>y = 0</math> и <math>x = 1</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>2\frac{1}{3}</math></li> <li>2. <math>1\frac{2}{3}</math></li> <li>3. <math>2\frac{2}{3}</math></li> <li>4. <math>1\frac{1}{3}</math></li> </ol>	
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:		
10. 1.	$y = \cos x$ , $y = 0,5$ , $x = -\frac{\pi}{3}$ , $x = \frac{\pi}{3}$	
2.	$y = x^2$ , $y = 9$	
3.	$y = -x^2 - 4x + 5$ , $y = 5$	

	4.	$y = -x^2 + 4x, y = -x$	
	5.	$y = 4x^2, y = -12x$	
	6.	$y = 5 - x^2, y = x + 3$	
	7.	$y = 4 + x^2, y = 2 - x, x = -1, x = 1$	
	8.	$y = -x^2 - 4x + 5, y = 5$	
	9.	$y = x^3, y = 8, x = 1$	
<b>11.</b>	Найти первообразную для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , если $F(1) = 3$		
<b>12.</b>	Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ , если $F(3) = \ln(3e)$		
<b>Часть 2. (Каждое задание оценивается в 2 балла)</b>			
	Вычислить определенные интегралы:		
<b>1.</b>	1.	$\int_1^6 \left( \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 2 \right) dx$	
	2.	$\int_0^{2\pi} \left( \cos \frac{x}{8} - \sin \frac{x}{8} \right)^2 dx$	
	3.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sqrt[3]{9x^2 - 30x + 25} dx$	
	4.	$\int_1^3 (2x^2 + \lg x) dx + \int_1^3 (3x + \lg x) dx$	
	5.	$\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ , где $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$	
	6.	$\int_{\frac{1}{4}}^2 f(x) dx$ , где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3, & \text{если } x > 1 \end{cases}$	
	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:		
<b>2.</b>	1.	$y = x^2 - 6x + 7, y = -x^2 + 4x - 1$	
	2.	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 4$	
	3.	$y = x^3 + 5x^2, y = x^2 - 4x$	