

10.1 класс (технологический профиль)

2019 – 2020 уч. год.

Геометрия. УМК Атанасян Л.С. Модуль 8.

Тема модуля: **«Векторы в пространстве. Метод координат в пространстве»**

Глава IV. §1: п.п.38, 39; §2: п.п.40, 41, 42; §3: п.п.43, 44, 45

Глава V. §1: п.п.46, 47, 48,49; §2: п.п.50, 51, 52, 53*; §3: п.п.54, 55, 56, 57, 58*

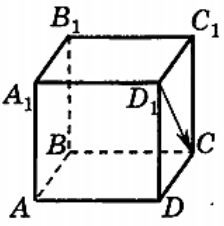
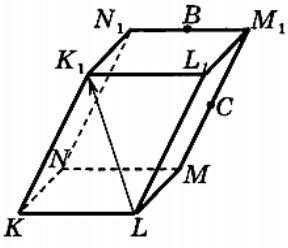
В процессе изучения данного модуля ученик научится/получит возможность:

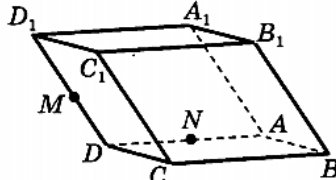
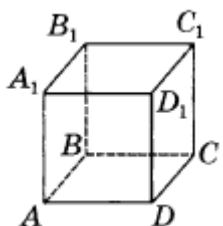
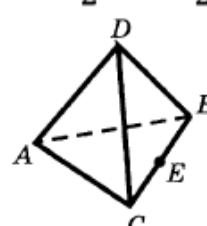
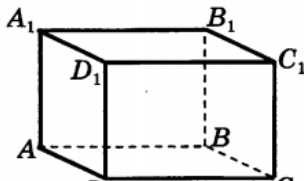
1. Определять понятие вектора, способы его изображения и названия; длину (абсолютную величину, модуль) вектора, равные векторы, противоположные векторы, коллинеарные векторы, виды коллинеарности; компланарные векторы; угла между векторами; свойства действий над векторами; скалярное произведение векторов, понятия направляющего вектора и вектора нормали к прямой; координат вектора в пространстве, радиус-вектора, *направляющего вектора, вектора нормали к прямой и плоскости**.
2. Строить и распознавать векторы различных видов, выполнять действия над векторами, разложение вектора по трем некопланарным векторам.
3. Понимать принцип разложения и полезность использования разложения вектора по трем некопланарным векторам.
4. Применять правила сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число в пространстве, применять правило параллелепипеда для сложения трех некопланарных векторов.
5. Воспроизводить формулу нахождения скалярного произведения векторов, использовать его свойства. *Иметь элементарные представления о существовании векторного и смешанного произведения векторов.*
6. *Определять и понимать область использования понятия направляющего вектора и вектора нормали к прямой.*
7. Понимать и применять необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов в пространстве. Узнавать компланарные векторы на уровне логических умозаключений. *Понимать и применять необходимое и достаточное условие компланарности векторов через смешанное произведение векторов и через определитель.*
8. Называть составляющие прямоугольной системы координат в пространстве, воспроизводить и применять формулу связи между координатами векторов и координатами точек в пространстве, выполнять действия над векторами в координатах.
9. Иметь представление о простейших задачах в координатах. Находить длину вектора, его сумму, разность и произведение вектора на число. Находить скалярное произведение векторов по формуле и в координатах, угол между векторами.
10. Применять при решении задач формулы расстояния между двумя точками, середины отрезка, скалярного произведения векторов в координатах; *уравнение прямой и плоскости в пространстве, формулу вычисления угла между прямыми через координаты направляющих векторов; формулы вычисления расстояния между точкой и прямой, между точкой и плоскостью в пространстве.*
11. Применять правило параллелепипеда, формулы для векторов в общем виде и в координатах при решении простейших задач.
12. Переводить геометрические факты на векторный и координатный язык и переводить векторные соотношения на геометрический язык.

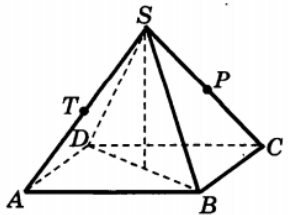
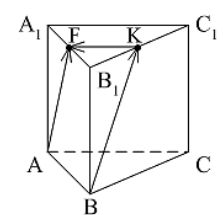
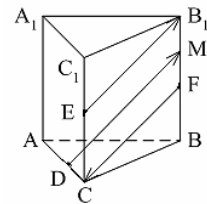
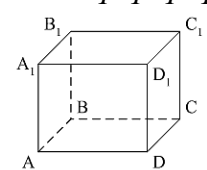
13. Применять коллинеарность и компланарность векторов, векторно-координатный метод при решении задач. Отбирать и применять элементарные приемы векторно-координатного метода решения стереометрических задач.
14. *Использовать различные способы вывода уравнений прямой и плоскости в пространстве, применять формулы расстояния между точкой и прямой, между точкой и плоскостью, скалярное произведение векторов при решении стереометрических задач. Использовать язык и инструменты аналитической геометрии и линейной алгебры при решении задач.*

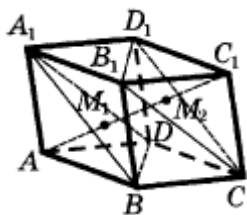
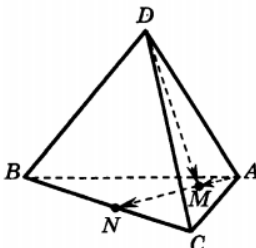
* материал, не входящий в обязательный минимум содержания образования в средней школе

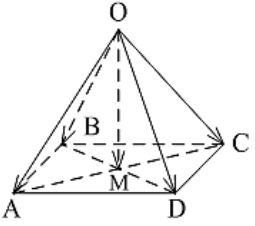
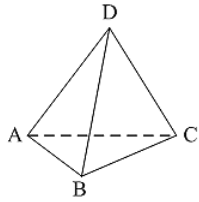
15. **Решать задачи с использованием понятий векторной математики:**

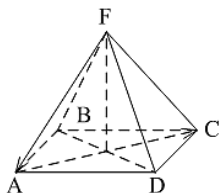
Часть 1.	
1.	<p>Какое утверждение неверное?</p> <p>1) Любые два противоположно направленных вектора коллинеарны. 2) Любые два коллинеарных вектора сонаправлены. 3) Любые два равных вектора коллинеарны.</p>
2.	<p>Какое утверждение неверное?</p> <p>1) Длины противоположных векторов не могут быть неравны. 2) Если длины векторов неравны, то и векторы неравны. 3) Если длины векторов равны, то и векторы равны.</p>
3.	<p>Какое утверждение верное?</p> <p>1) Любые два вектора компланарны. 2) Любые три вектора компланарны. 3) Три нулевых вектора компланарны.</p>
4.	<p>Какое утверждение верное?</p> <p>1) Если один из трёх векторов нулевой, то векторы компланарны. 2) Если векторы компланарны, то один из них нулевой. 3) Если векторы компланарны, то они равны.</p>
5.	<p>Какое утверждение неверное?</p> <p>1) Коллинеарные векторы компланарны. 2) Если векторы компланарны, то они коллинеарны. 3) Векторы компланарны, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.</p>
6.	<p>Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор, равный вектору $\overrightarrow{D_1C}$.</p>  <p>1) $\overrightarrow{A_1D}$ 2) $\overrightarrow{A_1B}$ 3) \overrightarrow{AC} 4) $\overrightarrow{DC_1}$</p>
7.	<p>Точки B и C — середины рёбер M_1N_1 и M_1M параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Укажите вектор противоположно направленный вектору $\overrightarrow{LK_1}$.</p>  <p>1) $\overrightarrow{MN_1}$ 2) \overrightarrow{BC} 3) $\overrightarrow{KL_1}$ 4) \overrightarrow{CB}</p>

8.	<p>Точки M и N — середины рёбер DD_1 и AD параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажите неверное утверждение.</p>  <p>1) \overline{BC} и $\overline{A_1 D_1}$ равны 2) \overline{NM} и $\overline{BC_1}$ сонаправлены 3) $\overline{A_1 D}$ и $\overline{D_1 A}$ противоположные 4) \overline{MN} и $\overline{BC_1}$ коллинеарны</p>	
9.	<p>Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AD = 8$ см, $AB = 9$ см, $AA_1 = 12$ см.</p> <p>Найти: а) $\overline{CC_1}$, \overline{CB}, \overline{CD}; б) $\overline{DC_1}$, \overline{DB}, $\overline{DB_1}$.</p>	
10.	 <p>В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите разность векторов а) $\overline{C_1 B} - \overline{C_1 D}$; б) $\overline{CB} - \overline{DB_1}$.</p>	
11.	<p>В правильном тетраэдре $DABC$ точка E — середина ребра BC. Найдите векторы:</p> <p>а) $\frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC}$; б) $\frac{1}{2} \overline{CB} - \overline{CA}$.</p> 	
12.	<p>В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K — середины ребер AC, BC и CD соответственно, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см. Найдите длины векторов:</p> <p>а) \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{NM}, \overline{BN}, \overline{NK}; б) \overline{CB}, \overline{BA}, \overline{DB}, \overline{NC}, \overline{KN}.</p>	
13.	<p>Векторы $\overline{DE} + \overline{DF} - \overline{KF}$ и $\overline{MC} - \overline{MK} - \overline{EC}$ являются:</p> <p>а) равными; б) нулевыми; в) противоположными; г) сонаправленными.</p>	
14.	<p>Упростите выражение $\overline{BC} + \overline{EA} + \overline{DF} + \overline{CE} - \overline{KF} + \overline{AD}$.</p>	
15.	<p>Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите вектор $\vec{a} = \overline{DA_1} + \overline{BC} + \overline{BA}$, началом и концом которого служат вершины данного параллелепипеда.</p> 	

16.	<p>Все рёбра правильной пирамиды $SABCD$ равны 2, точки T и P — середины рёбер AS и CS. Найдите длину вектора, равного сумме векторов $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP}$.</p> 	
17.	<p>В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD=8$ см, $AB=9$ см, $AA_1=12$ см. Найдите длины векторов $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{C_1 B_1}$</p>	
18.	<p>$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1 C_1} - \overrightarrow{C_1 D_1}$. а) $\overrightarrow{C_1 A_1}$; б) \overrightarrow{AC}; в) \overrightarrow{BD}; г) нет верного ответа.</p>	
19.	<p>Даны точки A, B, C, D, K. Известно, что $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AC} = z \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AK} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$. Тогда неверно, что... 1) все точки лежат в одной плоскости; 2) прямые BC и DK параллельны; 3) точки A, C и D не лежат на одной прямой.</p>	
20.	<p>$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, причём точки A, B и C не лежат на одной прямой. Прямые AC и BD не могут быть... 1) параллельными; 2) пересекающимися; 3) скрещивающимися.</p>	
21.	<p>$ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная призма. $A_1 F = FB_1$, $B_1 K = KC_1$.</p>  <p>Какое утверждение неверное? 1) $\overrightarrow{KF} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$. 2) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BK}$. 3) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BK}$.</p>	
22.	<p>$ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная призма. $CE = EC_1$, $BF = FB_1$, $FM = MB_1$, $AD : DC = 3 : 1$. Какое утверждение верное?</p>  <p>1) $\overrightarrow{DM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{EB_1}$. 2) $\overrightarrow{FC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{DM}$. 3) $\overrightarrow{EB_1} \uparrow \downarrow \overrightarrow{FC}$.</p>	
23.	<p>$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Тогда $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D_1 B} + \overrightarrow{B_1 D_1} + \overrightarrow{DC} = \dots$</p>	
24.	<p>$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. $\overrightarrow{AD} = \dots$</p>  <p>1) $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{D_1 C_1} - \overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{D_1 A_1} + \overrightarrow{BB_1}$; 3) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CC_1}$.</p>	

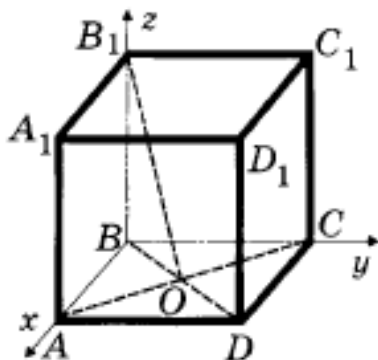
31.	<p>Докажите: Диагональ AC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников $A_1 B D$ и $C B_1 D_1$ и делится этими точками на три равные части.</p> 	
32.	<p>Точка N — середина ребра BC тетраэдра $DABC$, $M \in AN$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AN}$. Выразите вектор \overrightarrow{DM} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.</p> 	
33.	<p>$ABCA_1 B_1 C_1$ — призма. Укажите точку M, если: а) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C_1 B_1} + \overrightarrow{A_1 C_1}$; б) $\overrightarrow{B_1 M} = \overrightarrow{B_1 A} + \overrightarrow{B_1 B} + \overrightarrow{A A_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{B_1 C_1}$.</p>	
34.	<p>Точка $M(-2; 3; -7)$ находится от плоскости XOY на расстоянии, равном... 1) 7; 2) 2; 3) 3.</p>	
35.	<p>Расстояние от точки $B(-2; -5; \sqrt{3})$ до оси OX равно: а) $4\sqrt{3}$; б) $7\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{7}$.</p>	
36.	<p>Дана точка $M(2; -3; -4)$. Найдите точку симметричную ей, относительно начала координат. а) $M_1(-2; 3; 4)$; б) $M_1(2; 3; 4)$; в) $M_1(-2; -3; 4)$; г) $M_1(-2; -3; -4)$.</p>	
37.	<p>Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты точки M, если $A(-6; 4; 0)$, $B(0; -9; 4)$</p>	
38.	<p>Точка E — середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если $A(14; -8; 5)$, $E(3; -2; -7)$. а) $B(-8; 4; -19)$; б) $B(8; -4; -19)$; в) $B(8; -4; -19)$; г) $B(8; 4; 19)$.</p>	
39.	<p>$\vec{m} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Тогда вектор \vec{m} имеет координаты... 1) $\vec{m} \{2; 1; 1\}$; 2) $\vec{m} \{-2; 1; 1\}$; 3) $\vec{m} \{2; -1; -1\}$.</p>	
40.	<p>$\vec{a} \{1; 2; -3\}$, $\vec{b} \{-3; 2; 1\}$, $\vec{c} \{-3; -6; 9\}$. Тогда коллинеарными будут векторы... 1) \vec{a} и \vec{b}; 2) \vec{b} и \vec{c}; 3) \vec{a} и \vec{c}.</p>	
41.	<p>Первая и третья координаты ненулевого вектора \vec{a} равны нулю. Тогда неверно, что... 1) $\vec{a} \parallel OX$; 2) $\vec{a} \perp OZ$; 3) $\vec{a} \perp (XOZ)$.</p>	
42.	<p>Первая координата ненулевого вектора \vec{AB} равна нулю. Тогда неверно, что... 1) $\vec{AB} \perp OX$; 2) $\vec{AB} \cap OZ$; 3) $\vec{AB} \parallel OY$.</p>	
43.	<p>$A(1; 2; 3)$, $B(1; 5; 4)$, $C(4; 5; 3)$. Тогда верно, что... 1) $\vec{BC} \perp OY$; 2) $\vec{AC} \parallel OZ$; 3) $\vec{AB} \parallel (ZOY)$.</p>	

52.	<p>Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Точка O – произвольная точка пространства.</p> <p>$\vec{OM} = k(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$. Тогда $k = \dots$</p>  <p>1) $\frac{1}{2}$ 2) 2 3) $\frac{1}{4}$</p>	
53.	<p>$DABC$ – тетраэдр, $AB = BC = AC = AD = BD = CD$. Тогда неверно, что...</p>  <p>1) $\angle(\vec{AB}; \vec{DC}) = 90^\circ$; 2) $\angle(\vec{BD}; \vec{CD}) = 60^\circ$; 3) $\angle(\vec{AD}; \vec{BA}) = 60^\circ$.</p>	
54.	<p>$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$. Тогда угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ...</p> <p>1) острый; 2) тупой; 3) прямой.</p>	
55.	<p>Какое утверждение верное?</p> <p>1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.</p> <p>2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.</p> <p>3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.</p>	
56.	<p>Скалярное произведение векторов $\vec{a} \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} \{b_1; b_2; b_3\}$ равно...</p> <p>1) $a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3$;</p> <p>2) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;</p> <p>3) $a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3$</p>	
57.	<p>При каком n данные векторы $\vec{a} (2; -1; 3)$ и $\vec{b} (1; 3; n)$ перпендикулярны:</p> <p>а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) -1.</p>	
58.	<p>Дана точка $A(-1; 2; 5)$. Тогда координаты точки – проекции точки A на ось OZ равны...</p>	
59.	<p>Даны точки $M(-1; 2; 3)$ и $B(1; -1; 5)$. Тогда координаты вектора \vec{BM} равны...</p>	
60.	<p>Дан вектор $\vec{a} \{-3; 1; 2\}$ и точка $A(2; -5; 1)$. Найдите координаты точки B, если $\vec{AB} = -2\vec{a}$.</p>	
61.	<p>$A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$. Тогда $\vec{AB} = \dots$</p>	
62.	<p>$ABCD$ – параллелограмм, $AC \cap BD = O, B(-2; 1; 0), O(0; 1,5; 0)$. Тогда координаты точки D равны...</p>	
63.	<p>Вектор \vec{a} сонаправлен с вектором $\vec{b} \{-2; 2; 1\}, \vec{a} = 12$. Тогда координаты вектора \vec{a} равны...</p>	
64.	<p>$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $AA_1 = 2\sqrt{2}$ см. $ABCD$ – квадрат, $AB = 2$ см. Тогда $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1 = \dots$</p>	
65.	<p>Скалярное произведение векторов $\vec{a} \{-2; 1; 3\}$ и $\vec{b} \{-4; 2; -1\}$ равно...</p>	

66.	$\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \{1; -2; 4m\}$, $\vec{b} \{2; 2m+1; -m\}$. Тогда $m = \dots$	
67.	В правильной четырёхугольной пирамиде $FABCD$ все рёбра равны по 2 см. Тогда $\vec{FA} \cdot \vec{AC} = \dots$	
		
68.	Вычислите угол между векторами $\vec{a} \{2; -2; 0\}$ и $\vec{b} \{3; 0; -3\}$	
69.	Найдите угол между векторами $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{j} - \vec{k}$.	
70.	Угол между векторами \vec{j} и $\vec{a} \{1; -1; \sqrt{2}\}$ равен...	
71.	Даны координаты точек: $A(1; -1; -4)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(-1; 2; 5)$, $D(2; -3; 1)$. Тогда косинус угла между прямыми AB и CD равен...	
72.	Найдите сумму координат вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(2; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(4; 1; 0)$.	
73.	При каких a векторы \vec{AB} и \vec{CD} коллинеарны, если $A(-2; -1; 2)$, $B(4; 3; 6)$, $C(-1; a-1; 1)$, $D(-4; -1; a)$.	
74.	Даны векторы $\vec{a} \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} \{-2; 3; 1\}$ и $\vec{c} \{-3; 2; 1\}$ Найдите $ \vec{a} - \vec{b} $:	
75.	Даны координаты точек $A(-3; 2; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(1; -4; 3)$, $D(-1; 2; -2)$. Найти $ 2\vec{AB} + 3\vec{CD} $.	
76.	Даны векторы $\vec{a} \{-1; 2; 0\}$, $\vec{b} \{0; -5; -2\}$ и $\vec{c} \{2; 1; -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$.	
77.	Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{k}$	
78.	Вычислите угол между прямыми AB и CD , если: а) $A(3; -2; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(6; -3; 2)$, $D(7; -3; 1)$;	
79.	Определите, являются ли компланарными векторы $\vec{a} \{1; 6; 5\}$, $\vec{b} \{3; -2; 4\}$, $\vec{c} \{7; -18; 2\}$.	

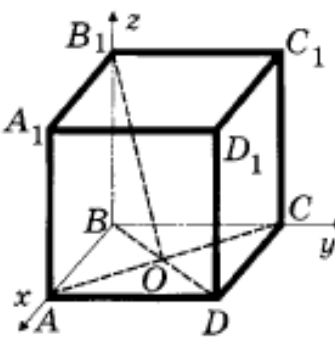
Часть 2. (примерные задачи для письменной части итогового теста)

80. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O – центр грани $ABCD$.
Используя метод координат, найдите:
а) угол между прямыми $B_1 O$ и $C_1 D$;
б) угол между прямой $B_1 O$ и плоскостью $AA_1 B_1$.



Часть 3*

(задачи, не входящие в обязательный минимум содержания образования в средней школе)

81.	В прямоугольной системе координат заданы два вектора: $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$. Найдите их векторное произведение.	
82.	Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$, $\vec{d} = (3, -2, 5)$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.	
83.	Принадлежат ли точки одной плоскости? $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$	
84.	Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}$	
85.	Компланарны ли векторы $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{d} = (3, -4, 7)$, заданные в прямоугольной системе координат.	
86.	Найдите координаты вектора нормали плоскости $\sqrt{2}x - 3y + 7z - 11 = 0$	
87.	Найдите общее уравнение плоскости МКР, если $M(0; 2; 4)$, $K(3; 0; -1)$, $P(0; 1; 0)$	
88.	Дано: точка $M(2; 0; 0)$; вектор $\overline{TN} \{-3; 0; 1\}$, вектор $\overline{KP} \{0; 3; -1\}$. Найти: общее уравнение плоскости β , проходящей через точку M , параллельно векторам \overline{TN} и \overline{KP} .	
89.	 <p>В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O – центр грани $ABCD$. Постройте сечение куба плоскостью α, проходящей через середины ребер AB и AD параллельно прямой $B_1 O$. Используя метод координат, найдите: а) уравнение плоскости α; б) расстояние от точки B_1 до плоскости α.</p>	
90.	<p>Задача № 2. (НГУ ММФ 1987, В 1). Ребро куба $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' равно 1, точка M – середина AD. Через середину N отрезка $B'M$ перпендикулярно прямой $B'M$ проведена плоскость α. Найти расстояние от центра куба до плоскости α.</p> 