

11.1 класс (технологический профиль)

Учебник: Геометрия (Атанасян Л.С.)
2019-2020 гг.

Тема модуля: «Планиметрия. Повторение»
Глава VIII. §§1 – 3, п.п. 85 – 96

Основные теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения теста:

Глава VIII. §1.

1. Углы и отрезки, связанные с окружностью.
2. Угол между касательной и хордой.
3. Две теоремы об отрезках, связанных с окружностью.
4. Углы с вершинами внутри и вне круга.
5. Вписанный четырехугольник.
6. Описанный четырехугольник.

Глава VIII. §2.

1. Решение треугольников.
2. Теорема о медиане.
3. Теорема о биссектрисе треугольника.
4. Формулы площади треугольника.
5. Формула Герона. *Формула Герона для четырехугольника.*
6. *Задача Эйлера.*

Глава VIII. §3.

Теоремы Чевы и Менелая и их применение.

Дополнительные темы на повторение планиметрии.

1. Площади фигур.
2. Тригонометрия в треугольниках. Теоремы синусов, косинусов.
3. Прямоугольный треугольник. Углы и длины в прямоугольном треугольнике.
4. Окружность.
5. Вписанные и описанные многоугольники.
6. Векторы и координаты в решении задач.

В процессе изучения данного модуля ученик научится/получит возможность:

обобщить, систематизировать и расширить имеющиеся знания о фигурах и формулах планиметрии.

использовать:

- правила вычисления углов с вершиной внутри и вне круга;
- формулы для вычисления угла между хордами, между хордой и касательной, между секущими, между касательной и секущей, между касательными;
- теорему о произведении отрезков хорд;
- теорему о касательной и секущей;
- теоремы о вписанных и описанных треугольниках;
- понятия, свойства и признаки вписанных и описанных многоугольников, вписанных и описанных четырехугольников.

решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства фигур и соотношений между ними, применяя дополнительные построения, алгебраический аппарат

проводить доказательные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования.

Примерные практические задания.

1. Углы и отрезки, связанные с окружностью.

- 1.1. Угол ACO равен 32° . Его сторона CA в точке A касается окружности с центром в точке O . Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 258). Ответ дайте в градусах.

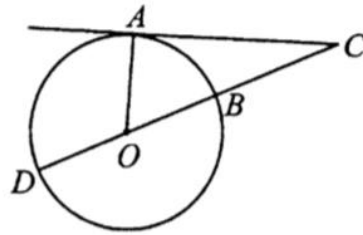


Рис. 258.

- 1.2. Хорда PK делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $11 : 7$. Под каким углом видна эта хорда из точки M , принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах (см. рис. 259).

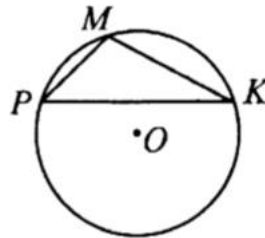


Рис. 259.

- 1.3. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности в точке A , O — центр окружности, а меньшая дуга окружности AB , заключённая внутри этого угла, равна 71° . Ответ дайте в градусах (см. рис. 264).

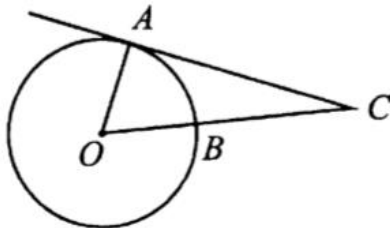


Рис. 264.

- 1.4. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B . Ответ дайте в градусах (см. рис. 268).

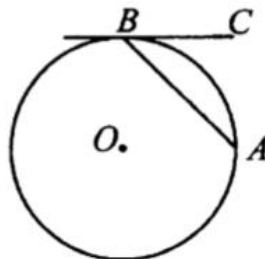


Рис. 268.

2. Решение треугольников. Углы и длины в прямоугольном треугольнике.

- 2.1. В треугольнике ABC угол A равен 38° , угол C равен 58° . На продолжении стороны AB отложен отрезок $BK = BC$. Найдите угол K треугольника BCK . Ответ дайте в градусах (см. рис. 257).

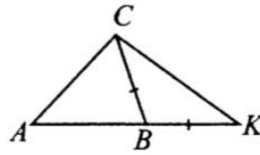


Рис. 257.

- 2.2. Один из внешних углов треугольника равен 72° . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $5 : 13$. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах (см. рис. 262).

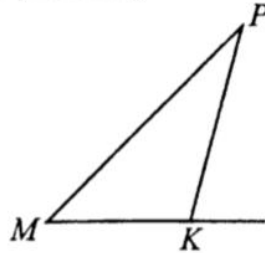


Рис. 262.

- 2.3. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 7$. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

- 2.4. В треугольнике MPK $MK = PK = 18\sqrt{3}$, угол K равен 120° . Найдите высоту MH (см. рис. 271).

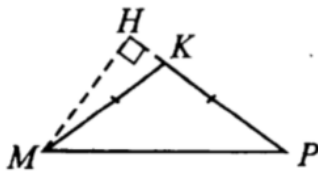


Рис. 271.

- 2.5. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 50° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 263).

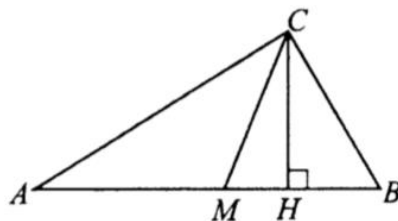


Рис. 263.

- 2.6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 27° и 63° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 267).

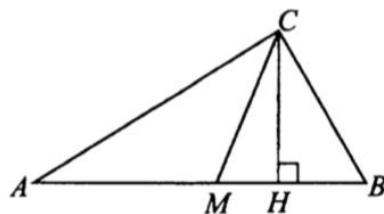


Рис. 267.

- 2.7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 31° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 273).

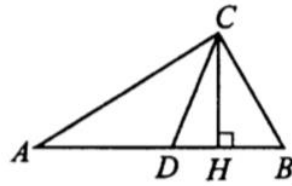


Рис. 273.

- 2.8. Острые углы прямоугольного треугольника равны 39° и 51° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 207).

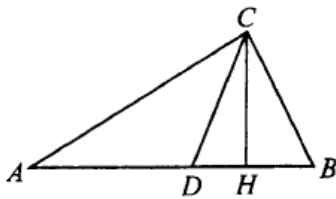


Рис. 207.

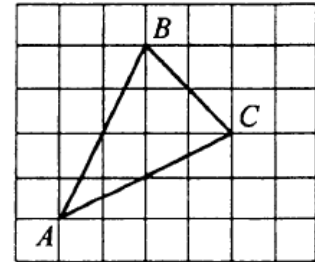


Рис. 206.

- 2.9. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону BC (см. рис. 206), если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

- 2.10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника MPK , если стороны клеток равны 1 (см. рис. 274).

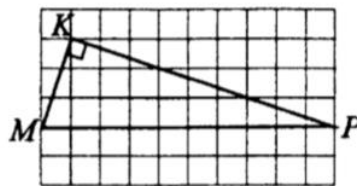


Рис. 274.

3. Вписанные и описанные четырехугольники и многоугольники.

- 3.1. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 18 (см. рис. 260).

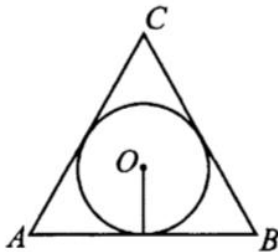


Рис. 260.

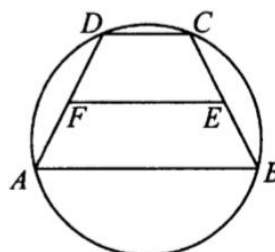


Рис. 261.

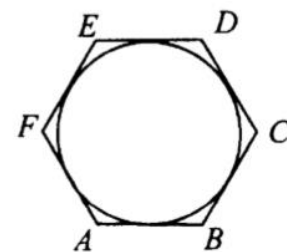


Рис. 265.

- 3.2. Около трапеции описана окружность (см. рис. 261). Периметр трапеции равен 142, средняя линия равна 50. Найдите боковую сторону трапеции.

- 3.3. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $5\sqrt{12}$ (см. рис. 265).

- 3.4. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $5\sqrt{2}$ (см. рис. 266).

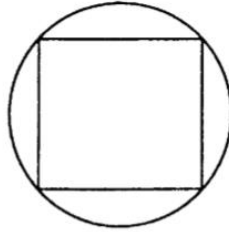


Рис. 266.

- 3.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 65° , угол CAD равен 42° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах (см. рис. 269).

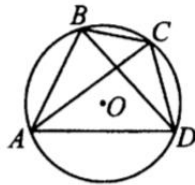


Рис. 269.

- 3.6. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $2 : 3 : 4$. Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 36 (см. рис. 270).

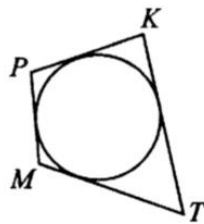


Рис. 270.

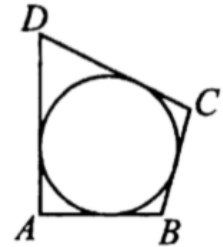


Рис. 272.

- 3.7. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 11$, $CD = 24$ (см. рис. 272). Найдите периметр четырёхугольника.

- 3.8. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности (см. рис. 275).

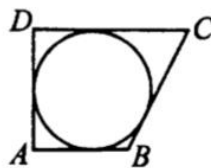


Рис. 275.

4. Тригонометрия в треугольниках.

- 4.1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = 3$, $AB = 5$. Найдите $\sin B$.
- 4.2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , причём известно, что $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$, $AC = 3$. Найдите AB .
- 4.3. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC , если $AC = 7$, $\cos A = 0,125$.

- 4.4. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{17}$, $AB = 17$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
- 4.5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 2,25$ и $\sin A = \frac{9}{13}$. Найдите длину гипотенузы.
- 4.6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 11\sqrt{11}$ и $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите AC .
- 4.7. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos B$, если $AB = 20$, $AC = 2\sqrt{19}$.
- 4.8. Дан острый угол α , $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Вычислите $\cos \alpha$.
- 4.9. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 8\sqrt{58}$ известен $\operatorname{tg} A = \frac{3}{7}$. Найдите AC .
- 4.10. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катета $AC = \sqrt{19}$ и гипотенузы $AB = 10$. Найдите $\sin A$.
- 4.11. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{2}$. Найдите AC , если $BC = 2,8$.
- 4.12. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите BC , если $\sin A = \frac{3}{4}$, $AC = 8\sqrt{7}$.

5. Векторы и координаты.

- 5.1. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-6; 4)$ и $B(4; 16)$.
- 5.2. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 326).

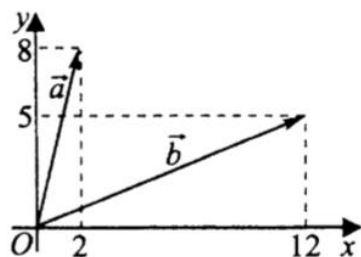


Рис. 326.

- 5.3. Точки $O(0; 0)$, $A(8; 6)$, $B(3; 4)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 327).

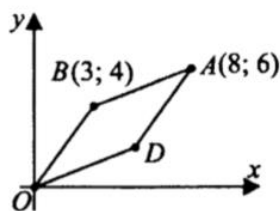


Рис. 327.

- 5.4. Стороны правильного треугольника MKP равны 12 (см. рис. 328).
Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MP}$.

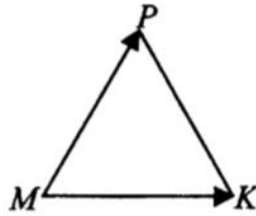
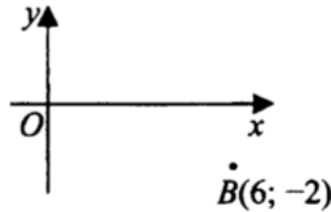


Рис. 328.

- 5.5. Найдите ординату точки, симметричной точке $B(6; -2)$ относительно оси абсцисс (см. рис. 329).



- 5.6. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 15 и 6 (см. рис. 330). Найдите скалярное произведение векторов \overrightarrow{AO} и \overrightarrow{BO} .

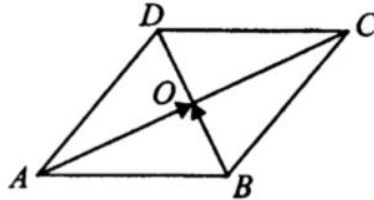


Рис. 330.

- 5.7. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(6; 4)$ и $B(14; -2)$.

- 5.8. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 16 (см. рис. 331). Найдите длину разности векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .

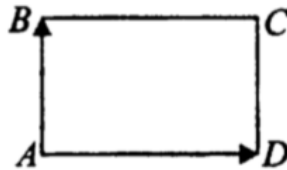


Рис. 331.

Часть 2 (письменная).

Задача формата №16 (3 балла) профильного ЕГЭ по математике.

1. *Демоверсия диагностической работы. ЕГЭ-2019.*

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C , углом B , равным 30° , катетом CA , равным 1, проведена медиана CD . Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F . Площадь треугольника CDF равна

2. *ЕГЭ-2018*

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

- Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- Найдите O_1O_2 .

3. *ЕГЭ-2018*

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R=8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .

4. *ЕГЭ-2018*

В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

- Докажите, что $AB = CD$.
- Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.

5. *ЕГЭ-2018*

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$. Эта окружность пересекает BC в точке E , а CD в точке K .

- Докажите, что отрезки AE и AK равны.
- Найдите AD , если известно, что $EC = 48$, $DK = 20$, а косинус угла BAD равен $0,4$.

6. *Демоверсия ЕГЭ-2019*

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

7. *ЕГЭ-2019. Диагностическая работа СтатГрад от 20.09.2018 г.*

Две окружности касаются внешним образом в точке C . Прямая касается меньшей окружности в точке A , а большей — в точке B , отличной от A . Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке D , прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E .

- Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD .
- Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL , если радиусы окружностей равны 2 и 5.

8. *ЕГЭ-2017*

Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K , так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найти отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$.

9. *ЕГЭ-2017*

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 20$ и $BC = 15$.

10. *ЕГЭ-2019. Математика. Профильный уровень: Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В.Яценко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2019. №16, вариант 23.*

Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

12. *ЕГЭ-2019.*

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN , если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.

13. *ЕГЭ-2019, демоверсия ЕГЭ профиль 2020.*

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

14. *ЕГЭ-2019.*

Около $\triangle ABC$ описана окружность. Прямая BO , где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

а) Докажите, что $OP = AP$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

15. *ЕГЭ-2019.*

Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$.

16. *ЕГЭ-2019.*

В остроугольном

треугольнике ABC , $\angle A = 60^\circ$. Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь $\triangle AHO$, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

17. ЕГЭ-2019.

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ — биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.

б) Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

18. ЕГЭ-2019.

Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что $AB = BC$.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника, проведённая из вершины A , делит сторону BC .

19. ЕГЭ-2019.

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH .

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$.

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH , вторично пересекающей отрезок AC в точке P , а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH , вторично пересекающей отрезок BC в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2 , если $AC = 22$, $BC = 18$.

20. ЕГЭ-2019.

Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке K . Прямая касается первой окружности в точке A , а второй окружности в точке B . Луч BK пересекает первую окружность в точке D , луч AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.