

11 класс, Математика (базовый уровень)

2019-2020 уч.год

Тема модуля «ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛЫ»

В тесте проверяются теоретическая и практическая части.

Учащиеся должны знать/понимать:

Понятие первообразной. Какую функцию называют первообразной для функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Свойства первообразных. Формулы первообразных элементарных функций.

Определение неопределенного интеграла, символику и обозначение неопределенного интеграла.

Что называют интегрированием функции. Определенный интеграл.

Символику и обозначение определенного интегралов.

Основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла.

Понятие и виды криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции.

Формула Ньютона - Лейбница. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах.

Уметь:

Находить первообразные и вычислять интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования. Вычислять определенные интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования.

Использовать основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла при решении задач.

Узнавать и строить криволинейные трапеции, распознавать их виды.

Строить в координатной плоскости фигуры, ограниченные графиками функций.

Вычислять площади криволинейных трапеций, фигур, ограниченных графиками заданных функций с помощью определенного интеграла, формулы Ньютона-Лейбница.

Находить площадь круга, объем тел вращения, работу, массу стержня переменной плотности, работу электрического заряда, давление жидкости на стенку, центр тяжести с помощью определенных интегралов.

Решать задачи с использованием первообразной и интеграла:

| № | Элементы содержания задания | Ответ |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Часть 1. (Каждое задание оценивается в 1 балл) | | |
| 1. | Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если: | |
| | 1. $F(x) = 3x^3 + 5x^2 + \operatorname{tg} x - 8$ и $f(x) = 9x^2 + 10x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; | |
| | 2. $F(x) = 6x^5 + \ln 6x$ и $f(x) = 30x^4 + \frac{1}{x}, x > 0$. | |
| | 3. $F(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ и $f(x) = 3x^2 + 8x - 5, x \in \mathbf{R}$; | |
| | 4. $F(x) = 2x^5 + e^x$ и $f(x) = 10x^4 + e^x, x \in \mathbf{R}$. | |
| | 5. $F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 9x + 15$ и $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 9 (x \in \mathbf{R})$; | |
| | 6. $F(x) = \frac{3}{x^2} - 5x - \sin x - 10$ и $f(x) = -\frac{6}{x^3} - 5 - \cos x (x \neq 0)$. | |
| 7. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4), f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$; | | |
| 2. | Укажите общий вид первообразных для функций: | |

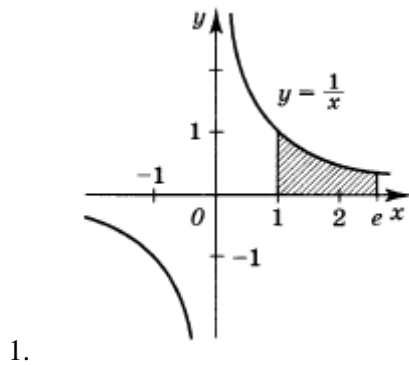
| | | |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 1. | $f(x) = x^4 + 3x.$ <ol style="list-style-type: none"> $F(x) = \frac{x^5}{5} + 6x^2$ $F(x) = 4x^3 + 3 + C$ $F(x) = 4x^3 + 3$ $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} + C$ | |
| 2. | $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + \sqrt{3}.$ <ol style="list-style-type: none"> $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}$ $F(x) = 3x^2 + 6x - 2 + C$ $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + C$ $F(x) = 3x^2 + 6x - 2$ | |
| 3. | <p>Найдите первообразную для функции $f(x) = x + \cos x$.</p> <ol style="list-style-type: none"> $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$ $F(x) = x^2 + \cos x + C$ $F(x) = 2 - \cos x + C$ | |
| 4. | <p>Найдите первообразную для функции $f(x) = 3x^2 - \sin x$.</p> <ol style="list-style-type: none"> $F(x) = x^3 - \cos x + C$ $F(x) = 2x + \sin x + C$ $F(x) = x^3 + \cos x + C$ $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$ | |
| 5. | <p>Найдите первообразную для функции $f(x) = e^x - x^3$.</p> <ol style="list-style-type: none"> $F(x) = e^x - \frac{x^4}{4} + C$ $F(x) = e^x - 3x^2 + C$ $F(x) = e^{x-1} - 3e^2 + C$ $F(x) = e^x - x^4 + C$ | |
| 6. | <p>Найдите первообразную для функции $f(x) = e^x + 12$.</p> <ol style="list-style-type: none"> $F(x) = e^x + C$ $F(x) = e^{x-1} + C$ $F(x) = e^x + 12x + C$ $F(x) = e^x + 12 + C$ | |
| | Найдите общий вид первообразных и для заданной функции: | |
| 3. | 1. $y = \frac{5}{x} + \sin x, x \neq 0$ | |
| | 2. $y = 6 \cos x$ | |
| | 3. $y = \frac{7}{x^2}, x \neq 0$ | |
| | 4. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ | |

| | | | |
|----|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|--|
| | 5. | $y = -13 \sin x + \frac{5}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2}, n \in Z$ | |
| | 6. | $y = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x} - 6^x, x \neq \pi, n \in Z$ | |
| | 7. | $y = \sqrt{2x} - x^5 + \frac{3}{x}, x \neq 0$ | |
| | 8. | $y = \sqrt[5]{x} - 2e^x$ | |
| | 9. | $y = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, x \neq \pi, n \in Z$ | |
| | 10. | $y = x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4}, x > 0$ | |
| | Найдите общий вид первообразных для заданной функции: | | |
| 4. | 1. | $y = e^{5x+2}$ | |
| | 2. | $y = \sin(4x-7)$ | |
| | 3. | $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ | |
| | 4. | $y = -\frac{1}{(6x+1)^2}$ | |
| | 5. | $y = \frac{1}{\sqrt{7x-9}}$ | |
| | 6. | $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ | |
| | 7. | $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$ | |
| | Для функции $f(x)$ найдите ту первообразную, которая проходит через точку $M(x;y)$ | | |
| 5. | 1. | $f(x) = 5e^x, M(0;14)$ | |
| | 2. | $f(x) = -9 \cos x, M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ | |
| | 3. | $f(x) = -4x^3 + \frac{1}{x^2}, M(1;2)$ | |
| | Найдите неопределенный интеграл: | | |
| 6. | 1. | $\int \frac{-10}{\sqrt{5x-4}} dx$ | |
| | 2. | $\int (\cos 2x - \sin 3x) dx$ | |
| | 3. | $\int \sqrt{6-5x} dx$ | |
| | Вычислить определенные интегралы: | | |
| 7. | 1. | $\int_{-1}^0 \frac{dx}{-5x+6}$ | |

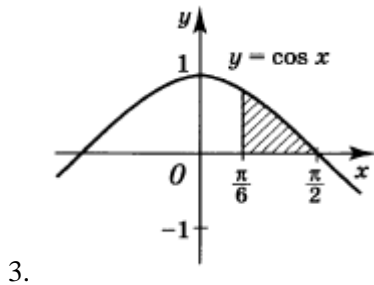
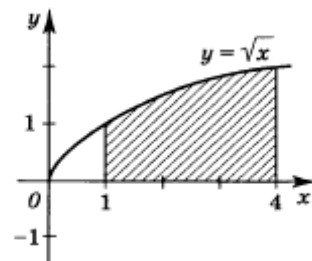
| | | |
|----|----------------------------------------------|--|
| 2. | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ | |
| 3. | $\int_{-1}^2 x^4 dx$ | |
| 4. | $\int_2^8 2dx$ | |
| 5. | $\int_{-8}^0 \frac{3x}{4} dx$ | |
| 6. | $\int_0^e \frac{3dx}{x}$ | |
| 7. | $\int_{-1}^4 (x^2 - x + 4) dx$ | |
| 8. | $\int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx$ | |
| 9. | $\int_0^1 ((x-2)^3 + 3(x-1)^2) dx$ | |

Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры:

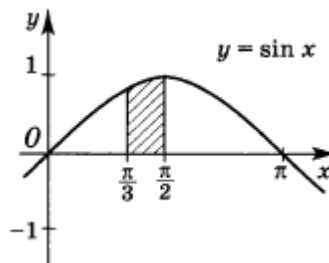
8.



2.



4.

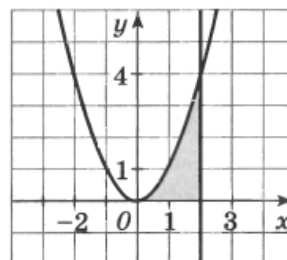


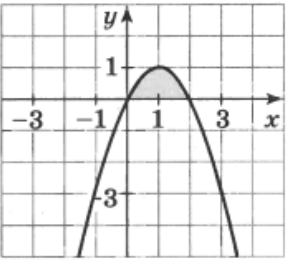
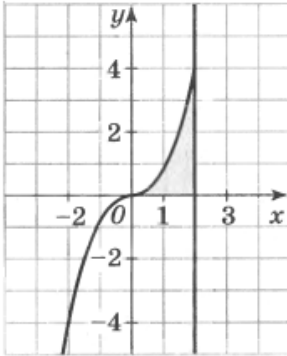
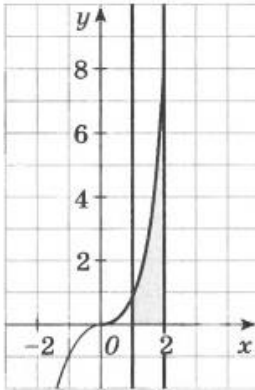
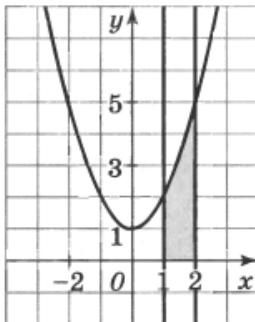
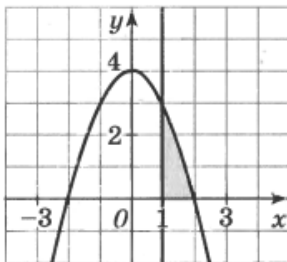
Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

9.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = 2$.

1. 2
2. $2\frac{2}{3}$
3. 4
4. $2\frac{1}{3}$



| | | |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. | <p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 $1\frac{2}{3}$ $1\frac{1}{3}$ $1\frac{1}{2}$ |  |
| 3. | <p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0,5x^3$, $y = 0$ и $x = 2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 2 1,5 2,5 2,2 |  |
| 4. | <p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 4 $3\frac{3}{4}$ $4\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{4}$ |  |
| 5. | <p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 3 $3\frac{2}{3}$ 3,5 $3\frac{1}{3}$ |  |
| 6. | <p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$ и $x = 1$.</p> <ol style="list-style-type: none"> $2\frac{1}{3}$ $1\frac{2}{3}$ $2\frac{2}{3}$ $1\frac{1}{3}$ |  |
| Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: | | |
| 10. 1. | $y = \cos x$, $y = 0,5$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ | |
| 2. | $y = x^2$, $y = 9$ | |
| 3. | $y = -x^2 - 4x + 5$, $y = 5$ | |

| | | | |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| | 4. | $y = -x^2 + 4x, y = -x$ | |
| | 5. | $y = 4x^2, y = -12x$ | |
| | 6. | $y = 5 - x^2, y = x + 3$ | |
| | 7. | $y = 4 + x^2, y = 2 - x, x = -1, x = 1$ | |
| | 8. | $y = -x^2 - 4x + 5, y = 5$ | |
| | 9. | $y = x^3, y = 8, x = 1$ | |
| 11. | Найти первообразную для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, если $F(1) = 3$ | | |
| 12. | Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, если $F(3) = \ln(3e)$ | | |
| Часть 2. (Каждое задание оценивается в 2 балла) | | | |
| | Вычислить определенные интегралы: | | |
| 1. | 1. | $\int_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 2 \right) dx$ | |
| | 2. | $\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{8} - \sin \frac{x}{8} \right)^2 dx$ | |
| | 3. | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sqrt[3]{9x^2 - 30x + 25} dx$ | |
| | 4. | $\int_1^3 (2x^2 + \lg x) dx + \int_1^3 (3x + \lg x) dx$ | |
| | 5. | $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$ | |
| | 6. | $\int_{\frac{1}{4}}^2 f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3, & \text{если } x > 1 \end{cases}$ | |
| | Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: | | |
| 2. | 1. | $y = x^2 - 6x + 7, y = -x^2 + 4x - 1$ | |
| | 2. | $y = 4 - x^2, y = x^2 - 4$ | |
| | 3. | $y = x^3 + 5x^2, y = x^2 - 4x$ | |