Всероссийская олимпиада школьников
По математике
2018–2019 уч. г. Школьный этап.
Код участника 11 - 10 - 32

Максимально - 35 балл **Всего баллов** 21

№ 1

$$\frac{(2008\cdot 2028+100)(1998\cdot 2038+400)}{2018^4}=$$

$$=\frac{((2018-10)(2018+10)+100)((2018-20)(2018+20)+400)}{2018^4}=$$

$$=\frac{(2018^2-\cancel{2018\cdot 10}+\cancel{2018\cdot 10}-100\overset{+100}{})(2018^2+\cancel{2018\cdot 20}-\cancel{2018\cdot 20}-400+400)}{2018^4}=$$

$$=\frac{(2018^2-100+100)(2018^2-400+400)}{2018^4}=\frac{2018^2\cdot 2018^2}{2018^4}=$$

$$=\frac{2018^4}{2018^4}=1$$

+ 7б.

Ответ: 1.

№ 2

$0<y<x<1$

Док-ть:

$\frac{x-y}{1-xy}<1$

Док-во: т.к. $x\in(0;y)$, $y\in(x;1)$, $x>y \Rightarrow \begin{cases} x-y>0 \\ x-y<1 \end{cases} \Rightarrow 0<x-y<1$

$0<x\cdot y<1$

1) $xy>x-y$ (например: $x=0{,}9$; $y=0{,}8$)

2) $xy<x-y$ (например: $x=0{,}2$; $y=0{,}1$)

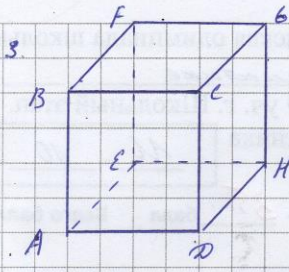
$1-xy>x-y$ (всегда);

т.к знаменатель больше числителя то значение дроби всегда <1. $\Rightarrow$

$\frac{x-y}{1-xy}<1$

− 0б

№3.



У нас есть куб ABCDEFGH, у любого куба всего 6 граней.

На каждой грани 4 вершины, где мы можем поставить цифры (1; -1), следовательно, у нас есть 16 различных комбинаций с этими цифрами для каждой грани. Но всего различных значений при сложении получится всего 5.

Так как при сложении не важно, на каком именно месте стоит та или иная цифра (при перестановке слагаемых сумма не меняется)

Например:

$1+1+1+(-1)=2$
$1+1+(-1)+1=2$
$1+(-1)+1+1=2$
$(-1)+1+1+1=2$

$(-1)+(-1)+1+1=0$
$1+1+(-1)+(-1)=0$
$1+(-1)+1+(-1)=0$
$1+(-1)+(-1)+1=0$
$(-1)+1+1+(-1)=0$
$(-1)+1+(-1)+1=0$

$1+(-1)+(-1)+(-1)=-2$
$(-1)+1+(-1)+(-1)=-2$
$(-1)+(-1)+1+(-1)=-2$
$(-1)+(-1)+(-1)+1=-2$

Следовательно, у нас получилось 3 различных значения.

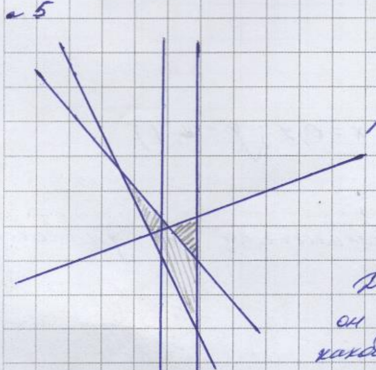
Плюс максимальное и минимальное ($1+1+1+1=4$; $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$)

Итого, 5 различных значений. А т.к. граней у куба всего 6, то в лучшем случае, как минимум одно значение будет повторяться.

+7б.

Ответ: Нет, нельзя (как минимум одно значение встретится дважды)

№5



Выиграет тот, кто ходит первым, т.к. впервые число кусков плоскости разделится на 5 тогда, когда будет проведена пятая прямая, т.е. когда будет в общем пятый ход

(1, 2, 1, 2, 1)

Для того, чтобы в этот ход ему выиграть, он должен провести прямую, параллельную какой-либо уже проведённой прямой, но не пересекающую пересечение прямых, ~~т.е. прямая~~

(Лист - 2)

Всероссийская олимпиада школьников
По математике
2018–2019 уч. г. Школьный этап.
Код участника М - 10 - 32

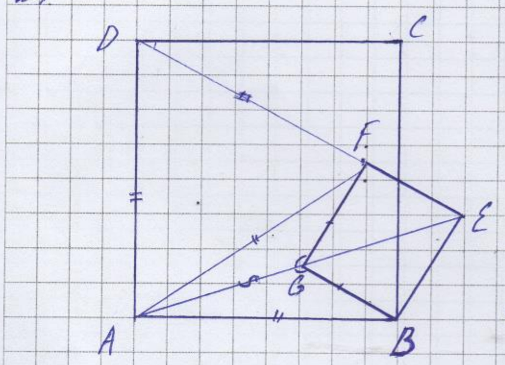
Максимально - 35 **балл** **Всего баллов** 21

(5, продолжение) т.е. эта прямая не должна проходить через точку, в которой уже пересекаются проведённые прямые.

Тогда число кусков, на которые разделилась плоскость, будет равно 5 => будет делиться на 5.

-0б.

№ 4.



Проведём прямую AF. Рассмотрим треугольники $\triangle AGB$ и $\triangle AGF$:
AG - общая сторона
$GB = GF$ (т.к. $GFEB$ - квадрат)
т.к. GE - диагональ квадрата $FEBG$, то $\angle EGB = \angle EGF = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ =>
$\angle AGB = \angle AGF = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

=> треугольники AGB и AGF равны по первому признаку равенства $\triangle$. => $AB = AF$, а т.к. $AB = AD$ (т.к. $ABCD$ - квадрат), то

$AB = AF = AD$

$\angle GAF = \angle GAB = \alpha$ => $\angle FAD = 90^\circ - 2\alpha$
т.к. $AF = AD$, то $\triangle FAD$ - равнобедренный =>
$\angle ADF = \angle DFA = (180^\circ - \angle FAD) : 2 = (180^\circ - 90^\circ + 2\alpha) : 2 = 45 + \alpha$
$\angle DFA = 45 + \alpha$
$\angle AFG = \cancel{\angle FGA}\ 180^\circ - \angle FGA - \alpha = 45 - \alpha$

+7б.

$\angle DFG = \angle DFA + \angle AFG = (45 + \alpha) + (45 - \alpha) = 90$
$\angle DFA = \angle EFG = 90^\circ$ =>
$\angle DFG + \angle DFA = 180^\circ$ => точки D, F, E лежат на одной прямой.