

ГЛАВА 9. ВЕКТОРЫ

Понятие вектора

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Установите связь между векторами $\overline{KL}, \overline{MN}$ и \overline{AC} .

2. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $AD = 10$ точка $K \in AB$ и $AK : KB = 1 : 2$, точка $L \in CD$ и $CL : LD = 1 : 3$. Найдите величину $|\overline{LK}|$.

3. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a отрезок AD – медиана. Точка E – середина отрезка BD . Найдите величину $|\overline{AE}|$.

Сложение и вычитание векторов

1. Используя правило многоугольника, упростите выражение: $\overline{AB} - \overline{CB} - \overline{MC} + \overline{MD} - \overline{KD}$.

2. Пусть $AB = 5, BC = 12, \angle B = 90^\circ$. Найдите величины $|\overline{AB} - \overline{BC}|$ и $|\overline{AB}| - |\overline{BC}|$.

3. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите величину $|\overline{AB} - \overline{CD} + \overline{BD} - \overline{BC}|$.

Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач.

1. В параллелограмме $ABCD$ точка $K \in AB$ и $AK : KB = 3 : 1$, точка $L \in AD$ и $AL : LD = 4 : 3$. Выразите вектор \overline{LK} через неколлинеарные векторы \overline{AB} и \overline{AD} .

2. Даны неколлинеарные векторы \vec{a} и \vec{b} . При каких значениях c векторы $\vec{m} = (c+1)\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{n} = 5\vec{a} + (c-1)\vec{b}$ коллинеарны? Для этих значений c установите связь между векторами \vec{m} и \vec{n} .

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $\angle A = 45^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, $BC = 4$, $CD = 12$. Найдите величину $\left| \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC}) + \overline{BC} \right|$.

1. $ABCD$ – параллелограмм, $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, $K \in BC$, $L \in AD$, $BK : KC = 2 : 3$, $AL : LD = 3 : 2$. Найдите разложение вектора \overline{KL} по неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} .

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 8$, O – точка пересечения диагоналей. Разложите вектор \overline{DO} по векторам $\overline{AD} = \vec{a}$ и $\overline{AB} = \vec{b}$.

3. Диагонали ромба $AC = a$, $BD = b$. Точка $K \in BD$ и $BK : KD = 1 : 3$. Найдите величину $|\overline{AK}|$.

4. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60° , боковая сторона равна 12 см, большее основание равно 30 см. Найдите среднюю линию трапеции.

5. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AD = a$, $DC = b$, O – точка пересечения диагоналей. Найдите величину $|\overline{AB} + \overline{DO} - \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{CD}|$.

ГЛАВА 10. МЕТОД КООРДИНАТ

Координаты вектора

1. Векторы $\vec{m} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{n} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$ разложены по неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} . Найдите разложение векторов \vec{a} и \vec{b} по векторам \vec{m} и \vec{n} .

2. Найдите координаты вектора $\vec{m} = 2(3\vec{a} - 4\vec{b}) + 3(\vec{a} + 2\vec{b})$, если $\vec{a} \{-1; 2\}$ и $\vec{b} \{2; -3\}$.

3. При каких значениях c для векторов $\vec{m} \{1 - c; 3\}$ и $\vec{n} \{c^2 - 13; 1 - 2c\}$ выполнено равенство $\vec{n} = -3\vec{m}$?

Простейшие задачи в координатах

1. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-4; 2)$, $B(2; -8)$, $C(10; 16)$. Отрезок AD — медиана тре-

угольника ABC , а AE — медиана треугольника ACD . Найдите \vec{AE} и $|\vec{AE}|$.

2. На осях координат найдите точки, равноудаленные от концов отрезка AB , если $A(-3; 5)$ и $B(6; 4)$.

3. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь, если вершины треугольника имеют координаты $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.

Уравнение окружности.

1. Напишите уравнение окружности, которая проходит через точки $A(-7; 8)$ и $B(-3; -4)$. При этом хорда AB является диаметром окружности.

2. Даны окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, и точка $A(5; 4)$. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внешним образом.

3. В квадрат площадью S вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата есть величина постоянная, и найдите эту величину.

Уравнение прямой

1. Координаты вершин треугольника $A(2; -6)$, $B(4; 2)$ и $C(0; -4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, которая параллельна стороне AC .

2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми, заданными уравнениями $y - x = 0$, $y + x = 0$ и $y - 2x + 4 = 0$.

3. Прямая $2y + x - 4 = 0$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 5$. Найдите длину хорды, которая отсекается этой окружностью на прямой.

1. Установите связь между векторами $\vec{m} = -38\vec{a} + 39\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\left(\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}\right)$.

2. Векторы $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ разложены по неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} . Разложите векторы \vec{a} и \vec{b} по векторам \vec{m} и \vec{n} .

3. Четырехугольник имеет вершины с координатами $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(9; -1)$, $D(7; -5)$. Определите вид четырехугольника (с обоснованием) и найдите его диагонали.

4. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(-3; 1)$, проходящей через точку $A(2; 3)$.

5. Прямая l проходит через точки $A(-3; 1)$ и $B(1; -7)$. Напишите уравнение прямой m , проходящей через точку $C(5; 6)$ и перпендикулярной прямой l .