

9.1, 9.2 класс (профильный уровень)

Учебник: Алгебра (Макарычев Ю.Н.)

Геометрия (Атанасян Л.С.)

2018-2019 гг.

Тема модуля: «Степени и корни. Начальные сведения из стереометрии.»

Основные теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения теста:

Степени и корни (Гл.5 §§14-16)

1. Понятие функции обратной данной, взаимно обратные функции
2. Функция, обратная степенной функции с натуральным показателем.
3. Определение арифметического корня n -ой степени и его свойства.
4. Определение степени с рациональным показателем и их свойства.
5. Решение иррациональных уравнений.
6. Решение иррациональных неравенств.

Начальные сведения из стереометрии (Гл.14 §§1-2)

1. Понятия многогранника и основных его элементов.
2. Понятие объёма тела и его свойства.
3. Призма: определение, виды, элементы, свойства, объём.
4. Параллелепипед: определение, виды, элементы, свойства, объём.
5. Пирамида: определение, виды, элементы, свойства, объём.
6. Понятия тела и поверхности вращения.
7. Цилиндр: определение, элементы, площадь поверхности, объём.
8. Конус: определение, элементы, площадь поверхности, объём.
9. Сфера и шар: определения, элементы, площадь сферы, объём шара.

В процессе изучения данного модуля ученик научится/получит возможность:

1. оперировать понятием степени с рациональным показателем;
2. выполнять преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями;
3. выполнять преобразования выражений, содержащих корни n -й степени;
4. решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$,
 $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;
5. решать простейшие иррациональные неравенства;

6. решать простейшие планиметрические задачи в пространстве;
7. проводить доказательные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования.

Умения, характеризующие достижение этого результата:

1. Находить функцию обратную данной и свойства двух взаимно обратных функции;
2. Вычислять арифметический корень n -й степени, находить значение выражений его содержащих;
3. Выполнять действия со степенями с рациональным показателем;
4. Решать иррациональные уравнения;
5. Решать иррациональные неравенства;
6. решать простейшие задачи, связанные с призмой: вычислять её линейные элементы, площадь поверхности и объём;
7. решать простейшие задачи, связанные с параллелепипедом: вычислять его линейные элементы, площадь поверхности и объём;
8. решать простейшие задачи, связанные с пирамидой: вычислять её линейные элементы, площадь поверхности и объём;
9. решать простейшие задачи, связанные с цилиндром: вычислять его линейные элементы, площадь поверхности и объём;
10. решать простейшие задачи, связанные с конусом: вычислять его линейные элементы, площадь поверхности и объём;
11. решать простейшие задачи, связанные со сферой и шаром: вычислять их линейные элементы, площадь сферы и объём шара.

Примерные практические задания.

1. Находить функцию обратную данной и свойства двух взаимно обратных функции;

1.1.	<p>Укажите, какие из перечисленных функций являются обратимыми.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $y = 5x + 2$ • $y = x^2$ • $y = x^5$ • $y = x^3 + 1$
1.2.	<p>Укажите истинные утверждения.</p> <p>Если $g(x)$ - функция, обратная к функции $f(x)$, то и $f(x)$ - функция, обратная к $g(x)$, при этом ...</p> <ul style="list-style-type: none"> • область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции • множество значений обратной функции совпадает с областью

	<p>определения исходной функции</p> <ul style="list-style-type: none"> • область определения обратной функции совпадает с областью определения исходной функции • множество значений обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции
1.3.	<p>Найдите область значений функции, обратной для $f(x) = 4 - 3x$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $(-\infty; +\infty)$ • $(0; +\infty)$ • $(-\infty; 4)$ • $[3; 4]$ • $[-4; -3]$
1.4.	<p>Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – взаимно обратные, причем $D(f) = (-\infty; 0]$, $E(f) = [0; \frac{\pi}{3}]$. Найдите область определения и область значений функции $y = g(x)$.</p>
1.5.	<p>Задайте формулой функцию, обратную функции: $y = 2x + 5$.</p>
1.6.	<p>Задайте формулой функцию, обратную функции: $y = 5 + \sqrt{x - 4}$.</p>

2. **Вычислять арифметический корень n-й степени, находить значение выражений его содержащих.**

3.

1.	<p>Вычислите:</p> <p>а) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[5]{32}$; д) $\sqrt{1,21}$; б) $\sqrt[3]{125}$; г) $\sqrt{128}$; е) $\sqrt{3,24}$.</p>
2.	<p>Выразите корень n-ой степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени:</p> <p>а) $\sqrt[7]{-38}$; в) $\sqrt[9]{-0,01}$; д) $\sqrt[5]{-1\frac{3}{7}}$; б) $\sqrt[4]{-3}$; г) $\sqrt[3]{-0,15}$; е) $\sqrt[15]{-5\frac{1}{3}}$.</p>
3.	<p>Вычислите значение корня</p> <p>а) $\sqrt[7]{-128}$; в) $\sqrt[9]{-512}$; д) $\sqrt[3]{-0,001}$; б) $\sqrt[3]{-216}$; г) $\sqrt[5]{-1024}$; е) $\sqrt[5]{-0,00001}$.</p>
4.	<p>Найдите значение выражения:</p> <p>а) $(\sqrt[4]{13})^4$; в) $(-\sqrt[4]{2})^4$; д) $(-\sqrt[5]{4})^5$;</p>
5.	<p>Вычислить: а). $\sqrt[5]{0,00243}$; б). $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; в). $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{72}$; г). $(\sqrt[3]{3})^{12}$</p>

6.	Установите соответствие между выражением и его значением: а) А) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16}$ Б) $\frac{3}{5}(\sqrt[3]{5})^3$ В) $0,9 \cdot \sqrt[3]{1000}$ 1) 3 2) 5 3) 9 б) А) $\sqrt[5]{32} - \sqrt{4}$ Б) $\frac{2}{3}(\sqrt[4]{3})^4$ В) $0,1 \cdot \sqrt[4]{10\,000}$ 1) 1 2) 2 3) 0 в) А) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{64}$ Б) $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[6]{64}$ В) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[4]{16}}$ 1) 3 2) 1,5 3) 10 г) А) $\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{625}}$ Б) $\frac{7}{3}\sqrt[4]{81}$ В) $\sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[4]{128}$ 1) 12 2) 7 3) 0,4
7.	Найдите значение выражения а) $10^4\sqrt[4]{\frac{16}{625}} - (2\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt{7})^0$; б) $10^3\sqrt[3]{\frac{8}{125}} - (2^4\sqrt{3})^4 + (\sqrt{5})^0$.
8.	Внесите множитель под знак корня: $a\sqrt[3]{2}$, где $a \geq 0$; $b\sqrt[4]{3}$, где $b < 0$; $x^5\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}}$, где $x > 0$; $z^4\sqrt{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2}}$, где $z > 0$.
9.	Вынесите множитель из-под знака корня а) $\sqrt{8a^2b^3}$, где $a \geq 0$; в) $\sqrt[6]{\frac{12a^7y^2}{x^{12}}}$, где $y \geq 0$; б) $\sqrt[3]{54a^4b^5}$; г) $\sqrt[4]{\frac{b^4c^2}{4a^2}}$, где $b \leq 0$, $c \geq 0$, $d > 0$.
10.	Найдите значение выражений: а). $\sqrt[3]{125} - \sqrt{-\sqrt{64}} + \sqrt[5]{-1}$; б). $\sqrt[8]{(-4)^8} + \sqrt[5]{(-2)^5}$;
11.	Вычислите значение выражения: $\sqrt[5]{6 - 2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6 + 2\sqrt{17}}$; $\sqrt[4]{\sqrt{19} + 10} \cdot \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}}$

3. Выполнять действия со степенями с рациональным показателем

3.1.	Представьте степени с дробным показателем в виде корней: а) $3x^{\frac{1}{5}}$ б) $(4x)^{-\frac{2}{5}}$ в) $-5x^{-3,5}$ г) $(a - b)^{\frac{5}{7}}$
3.2.	Замените арифметические корни степенями с дробным показателем: а) $\sqrt[3]{9^4}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$. в) $x^4\sqrt{5x\sqrt{x}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[9]{27x^6y^{12}}}$.

3.3.	<p>Вычислите:</p> <p>а) $25^{\frac{1}{3}} \cdot 25 : 25^{\frac{1}{6}}$;</p> <p>б) $81^{\frac{1}{4}} \cdot (9^{-3})^{\frac{1}{6}}$;</p> <p>в) $\left(\frac{1}{5^3} \cdot 27^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$.</p>
3.4.	<p>Вычислите:</p> <p>а) $\left(\frac{5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{1}{2}}$;</p> <p>б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{9}}$;</p> <p>в) $\left(\frac{216}{8} \cdot \frac{1}{0,027}\right)^{\frac{2}{3}}$.</p>
3.5.	<p>Вычислите:</p> $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$
3.6.	Вычислите $(-3)^{-4}$, результат умножить на 81
3.7.	Найти значение выражения $(2a^3b^{-5})^{-2}$, если $a=\frac{1}{2}$, $b=1$
3.8.	<p>Вычислите</p> $1000^{\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-1\frac{1}{3}} + 16^{0,25} \cdot 49^{0,5} =$
3.9.	Вычислите $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3} : 4^{-5} + 2007^0$
3.10.	Сократите дробь $\frac{2^{2n+3} \cdot 3^{3n-1}}{4^n \cdot 27^{n+1}}$, ответ увеличить в 81
3.11.	в). $\left(\frac{125}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$; г). $\left(2\frac{10}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$.
3.12.	<p>Упростите выражения:</p> <p>а) $(27a^{-0,3})^{\frac{2}{3}}$; б) $(a^{3,5}) \cdot \left(a^{-\frac{5}{16}}\right)^8$.</p>
3.13	<p>Упростите выражения:</p> <p>а) $\left(0,04x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{2}{5}}\right)^{-2,5}$;</p> <p>б) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1,5} \cdot \left(a^{-\frac{5}{12}}b^{\frac{5}{6}}\right)^{1,2}$.</p>

3.14	Упростите выражения: а) $\frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^3}}{x^{\frac{1}{8}}}$; б) $\left(a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{3}{5}}\right)a^{\frac{8}{5}}b^{\frac{2}{5}}$.
3.15	С помощью формул сокращенного умножения преобразуйте выражения: а) $\left(3x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(3x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(x^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{3}{5}}\right)^2$.
3.16	Сократите дробь $\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)b^{\frac{1}{2}}}{(a-b)b^{\frac{3}{2}}}$

4. Решать иррациональные уравнения

4.1.	Решите уравнения: а). $x^6 - 36 = 0$; б). $-x^5 - 7 = 0$; в). $x^{\frac{4}{5}} = 16$.
4.2.	Решите уравнения: $\sqrt{x-5} = 3$; $\sqrt{\frac{x+6}{x-6}} = 2$; $\sqrt[3]{x^2 - 4x + 24} = 3$; $\sqrt{x+2} = 4$; $\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = 3$; $\sqrt[3]{6x+1} = -5$;
4.3.	Решите уравнения: $\sqrt{6x^2 - 7x + 2} = 1$; $(x^2 - 16)\sqrt{x+2} = 0$; $\sqrt[3]{28 - 23x - x^3} = 3 - x$; $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 2$; $(x^2 - 25)\sqrt{x+3} = 0$; $\sqrt[4]{6x^2 - 4x + 1} = 1 - x$.
4.4.	Решите уравнение: а). $\sqrt{x^2 - 1} = x - 2$; б). $x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$.
4.5.	Решите уравнение А) $\sqrt{2x-1} = x-2$ Б) $x - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0$ В) $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$
4.6.	Решите уравнения: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$; $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$;

5. Решать иррациональные неравенства

1.	Решите неравенство: а). $\sqrt{x+2} > 0,5x + 1$ б). $\sqrt{2x-1} < x-2$ в). $\sqrt{4-x} < x+8$; г). $\sqrt{x+32} > x+2$;
----	---

2.	Решите неравенство: а) $\sqrt{2x^2 - 11x + 18} > 2$; б) $\sqrt{\frac{x+5}{x-7}} > 2$. в) $\sqrt[3]{x-8} > 3$.
3.	Решите неравенство $\sqrt[6]{x-5} < \sqrt[3]{x+1}$; $\sqrt{x-2} < \sqrt[4]{x+5}$.
4.	Решите неравенства: $\frac{\sqrt{x-4}-2}{8-\sqrt{x-4}} < 2$; $\frac{\sqrt{2x-5}-1}{\sqrt{2x-5}+1} > 3$;

6. Решать простейшие задачи, связанные с призмой: вычислять её линейные элементы, площадь поверхности и объём.

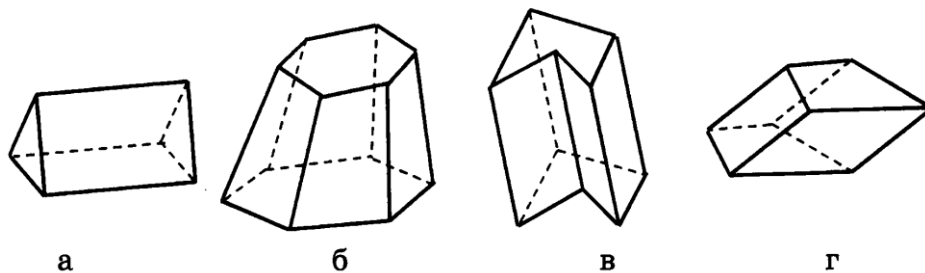
6.1. Сколько ребер у пятиугольной призмы?

А) 5 Б) 7 В) 10 Г) 15

6.2. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет 9 граней?

А) Треугольник Б) Шестиугольник
В) Семиугольник Г) Одиннадцатиугольник

6.3. Какие из данных многогранников являются призмами?



6.4.

Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно 4.

6.5.

Основанием прямой призмы является правильный шестиугольник, сторона которого равна 3, боковое ребро призмы равно 5. Найдите боковую поверхность призмы.

7. Решать простейшие задачи, связанные с параллелепипедом: вычислять его линейные элементы, площадь поверхности и объём.

7.1.

Диагональ грани куба равна 2. Найдите площадь полной поверхности куба.

7.2.

Сумма площадей трёх граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2 , а его рёбра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

8. Решать простейшие задачи, связанные с пирамидой: вычислять её линейные элементы, площадь поверхности и объём.

8.1. Сколько граней у двенадцатиугольной пирамиды?

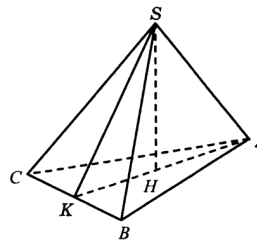
А) 11 Б) 12 В) 13 Г) 24

8.2. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, у которой 24 ребра?

А) Четырёхугольник Б) Шестиугольник
В) Восьмиугольник Г) Двенадцатиугольник

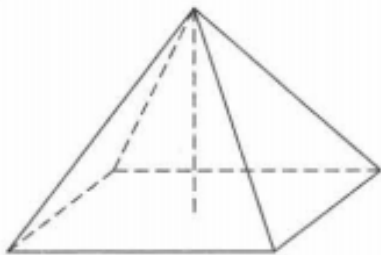
8.3. На рисунке $SABC$ – правильная пирамида, SH – её высота. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Треугольник ABC — правильный.
- 2) Треугольник ABS — правильный.
- 3) Треугольник ASH — прямоугольный.
- 4) Треугольник ASK — прямоугольный.



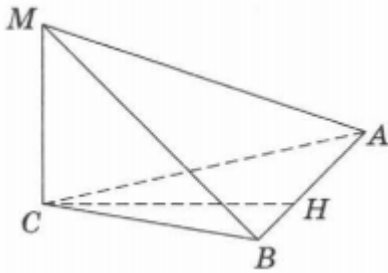
8.4.

Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если апофема равна 13, сторона основания равна 24.



8.5.

Боковое ребро MC пирамиды $MABC$ является высотой пирамиды, отрезок CH — высотой основания. Найдите объем пирамиды, если $AB = 4$, $CH = 6$, $MC = 3$.



8.6. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна $5\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 13.

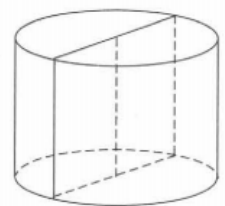
8.7.

Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 48, а апофема равна 4.

9. Решать простейшие задачи, связанные с цилиндром: вычислять его линейные элементы, площадь поверхности и объём.

9.1.

Осевым сечением цилиндра (то есть сечением плоскостью, проходящей через его ось) является квадрат со стороной 12. Найдите площадь основания цилиндра.



9.2.

Площадь основания цилиндра равна 16π . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его образующая равна 3.

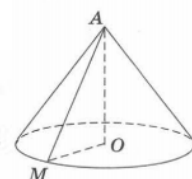
9.3.

Найдите радиус основания цилиндра, если его образующая в 2 раза больше радиуса основания, а объем цилиндра равен 54π .

10. Решать простейшие задачи, связанные с конусом: вычислять его линейные элементы, площадь поверхности и объём.

10.1.

Образующая конуса, изображенного на рисунке, равна 15, а косинус угла AMO равен $\frac{1}{3}$. Найдите диаметр основания конуса.

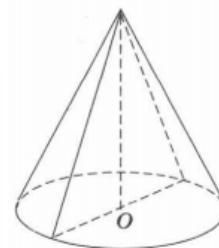


10.2.

В конусе угол между образующей и высотой равен 30° . Найдите высоту конуса, если радиус основания равен 14.

10.3.

Высота конуса равна $2\sqrt{5}$. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его высоту, является равнобедренным треугольником, боковая сторона которого равна 6. Найдите боковую поверхность конуса.



11. Решать простейшие задачи, связанные со сферой и шаром: вычислять их линейные элементы, площадь сферы и объём шара.

11.1.

Найдите площадь сферы, радиус которой равен 4.

11.2. Отношение объёмов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?

11.3.

Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша (радиус Земли считать равным 6375 км)?