

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов за работу — 100.

№ задания	Критерии	Баллы
1	Приведён верный пример — 10 баллов.	10
2	Дан ответ без пояснений — не более 5 баллов. Можно ставить баллы за ответы, отличающиеся более чем на 2 от верного. Приведено верное решение и дан правильный ответ — 15 баллов. В решении посчитаны лишние случаи вида $17:71$ — не более 5 баллов за задачу. В решении посчитаны лишние случаи вида $31:13$ — не более 5 баллов за задачу	15
3	Дан правильный ответ и приведено пояснение — 15 баллов. Дан правильный ответ без пояснений — 10 баллов	15
4	Дан верный ответ — 15 баллов. Дан неверный ответ, отличающийся от верного не более чем на 2, — не более 5 баллов	15
5	В решении используются ответы Пети на предыдущие вопросы для задания текущего (вопросы задаются не одновременно) — 0 баллов. В решении указаны вопросы, по которым возможно гарантировано восстановить загаданное число, но не объяснено, как это сделать, — 10 баллов. В решении указаны вопросы и объяснено, как гарантировано восстановить загаданное число, — 20 баллов	20
6	Баллы за следующие пункты суммируются: <ul style="list-style-type: none">Дан верный ответ (значение дроби) — 5 баллов.Приведён пример получения верного значения — 5 баллов.Доказано, что знаменатель не равен 2, — 5 баллов.Доказано, что со знаменателем 3 значение дроби не больше 16, — 5 баллов.Присутствует рассуждение о том, что с большим знаменателем значение дроби уменьшится (принимается без строго доказательства), — 5 баллов	25

ЗАДАНИЕ 1

В ряд стоят 5 чисел, первое и последнее число в ряду известны. Оказалось, что сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 60. Найдите оставшиеся числа.

20 * * * 26

Достаточно привести один пример.

Ответ: 20 26 14 20 26, других вариантов нет.

ЗАДАНИЕ 2

Электронные часы показывают время в формате 22:45 (22 часа 45 минут). Сколько раз за сутки от 00:00 до 23:59 показания часов будут читаться одинаково слева направо и справа налево? Пример такого показания изображён на картинке.



В решении необходимо не только предоставить ответ, но и объяснить, каким образом он был получен.

Решение:

Достаточно перебрать все варианты значений числа, которое указывает на количество часов, ведь число, указывающее количество минут, будет зеркально отражать количество часов. Если на часах 00, то на минутах 00, а если часов 01, то минут 10, и так для всех остальных комбинаций. Но некоторые варианты числа часов подходить не будут, например 06, потому что 60 минут быть не могут (после 06:59 сразу идёт 07:00).

Всего вариантов чисел, указывающих количество часов, — 24, от 00 до 23, но из них не подойдут 06, 07, 08, 09, 16, 17, 18, 19 — 8 вариантов, следовательно, ответ: $24 - 8 = 16$.

Ответ: 16.

ЗАДАНИЕ 3

Сумму цифр четырёхзначного числа умножили на произведение его цифр и получили 330. Найдите хотя бы одно такое число.

В решении необходимо привести пример такого числа и доказать, что оно удовлетворяет условию.

Решение:

Разложим 330 на простые множители: $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Так как перемножали цифры и сумму цифр, то сумма цифр должна делиться на 11 (ведь цифры делиться на 11 не могут).

Разберём случай, когда сумма цифр равна 11. Перебором понимаем, что единственный возможный набор цифр — это 1, 2, 3 и 5, ведь $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$.

Проверим, есть ли другие случаи.

Сумма 22, произведение 15: произведение 15 даёт набор (1, 1, 3, 5), но его сумма 10, а не 22.

Сумма 33, произведение 10: произведение 10 даёт набор (1, 1, 2, 5), но его сумма 9, а не 33.

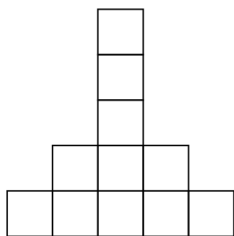
Других случаев нет. Следовательно, все возможные ответы — перестановки цифр 1, 2, 3, 5.

Ответ: все возможные ответы — перестановки цифр 1, 2, 3, 5.

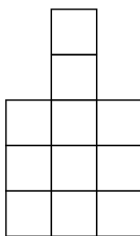
ЗАДАНИЕ 4

Стёпа внимательно рассмотрел башню из кубиков и схематично зарисовал её вид спереди, справа и сверху (см. рис.). Из скольких кубиков состоит такая башня?

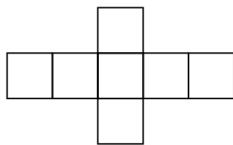
Вид спереди



Вид справа



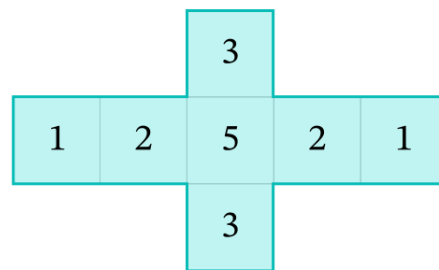
Вид сверху



В решении достаточно привести ответ.

Решение:

Вид сверху.



Ответ: 17.

ЗАДАНИЕ 5

Петя и Вася играют в игру. Петя загадывает натуральное число от 1 до 5. Вася пишет на бумаге три вопроса, ответом на которые может быть «да» либо «нет», и передаёт Пете. Петя записывает ответы в том же порядке, что и вопросы, и передаёт их Васе. Какие три вопроса может написать Вася так, чтобы по ответам Пети однозначно определить число?

В решении укажите три вопроса, а также объясните, как по ответам Васи восстановить число.

Решение:

Изначально у Пети 5 вариантов чисел, которые он может загадать. Задача Васи — каждым вопросом максимально сокращать количество вариантов. Придумаем такой первый вопрос, чтобы при ответе «да» подходящих чисел у Пети было всего 2, а при ответе «нет» — оставшиеся 3 числа. Этому условию удовлетворяет, например, вопрос: «Ты загадал чётное число?». Если Петя отвечает «да», то Вася понимает, что загадано либо 2, либо 4. Если Петя отвечает «нет», значит, им загадано 1, 3 или 5.

Вторым вопросом Вася может спросить: «Твоё число больше 3?» Если Петя отвечает «да», то Вася понимает, что число Пети — это или 4, или 5 (если на первый вопрос был получен положительный ответ, то это 4, в ином случае — 5). Если же на второй вопрос был получен ответ «нет», а на первый «да», то Петей загадано число 2. В случае если оба ответа отрицательны, остаются варианты 1 и 3, и тогда третьим вопросом Вася может уточнить: «Ты загадал число 1?»

Итоговая схема

Первый вопрос: «Ты загадал чётное число?»

Второй вопрос: «Твоё число больше 3?»

Третий вопрос: «Ты загадал число 1?»

Если получены ответы «нет», «нет», «да» — загадана 1.

Если получены ответы «да», «нет», «нет» — загадана 2.

Если получены ответы «нет», «нет», «нет» — загадана 3.

Если получены ответы «да», «да», «нет» — загадана 4.

Если получены ответы «нет», «да», «нет» — загадана 5.

Существует большое количество других вариантов вопросов.

ЗАДАНИЕ 6

Игорь хочет заполнить ячейки различными простыми числами, не превосходящими 18, так, чтобы значение получившейся дроби было натуральным числом. Какое наибольшее значение он может получить?

$$\frac{\square + \square + \square + \square + \square}{\square}$$

Решение:

Вспомним все простые числа, не превосходящие 18: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 — их семь, следовательно, какое-то одно Игорь использовать не будет.

Чтобы дробь была максимальная, знаменатель должен быть как можно меньше, но 2 в знаменателе стоять не может, так как оставшиеся простые числа нечётные, а сумма пяти нечётных чисел будет нечётной, то есть на 2 не поделится и у Игоря не получится натуральное число.

Попробуем поставить в знаменатель 3, тогда в числитель нужно подобрать пять таких чисел, что их сумма будет кратна 3. Сумма оставшихся шести простых чисел будет $2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 55$. Осталось понять, какое число нужно убрать, чтобы сумма была максимальной возможной и кратной 3. Перебрав все варианты, понимаем, что можем убрать или 13, или 7, но, убрав именно 7, сумма будет максимальной возможной, то есть у Игоря получилась дробь $\frac{2+5+11+13+17}{3} = 16$.

Покажем, что со знаменателями, большими 3, результат дроби будет меньше. Сумма наибольших простых чисел $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 56$. Минимальный знаменатель равен 5, тогда сумма не больше, чем $\frac{56}{5} = 11,2$; результат меньше предыдущего.

Ответ: 16.