

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ

(спецификация работы и КИМ)

Спецификация опирается на концепцию математической грамотности PISA-2021

Разработчики заданий : Мельникова С.А., Старкова Е.О.

## Содержательная область:

- *пространство и форма* (задания, относящиеся к пространственным и плоским геометрическим формам и отношениям, т.е. к геометрическому материалу);
- *изменение и зависимости* (задания, связанные с математическим описанием зависимости между переменными в различных процессах, т.е. с алгебраическим материалом);
- *количество* (задания, связанные с числами и отношениями между ними, т.е. с арифметикой);
- *неопределённость и данные* (задания, связанные с вероятностными и статистическими явлениями и зависимостями, т.е. с разделами статистики и теории вероятностей).

## Контекст задания:

- *общественная жизнь* (обмен валюты, денежные вклады в банке, прогноз итогов выборов, демография);
- *личная жизнь* (повседневные дела: покупки, приготовление пищи, игры, здоровье и др.);
- *образование/профессиональная деятельность* (школьная жизнь и трудовая деятельность, включают такие действия, как измерения, подсчёты стоимости, заказ материалов, например, для построения книжных полок в кабинете математики, оплата счетов и др.);
- *научная деятельность* (рассмотрение теоретических вопросов, например, анализ половозрастных пирамид населения, или решение чисто математических задач, например, применение неравенства треугольника).

## Уровни сложности:

- **Низкий** – выполнять одношаговую процедуру, например, распознавать факты, термины, принципы и понятия, или найти единственную точку, содержащую информацию на графике или в таблице.
- **Средний** – использовать и применять понятийное знание для описания или объяснения явлений, выбирать соответствующие процедуры, предполагающие два шага или более, интерпретировать или использовать простые наборы данных в виде таблиц или графиков.
- **Высокий** – анализировать сложную информацию или данные, обобщать или оценивать доказательства, обосновывать, формулировать выводы, учитывая разные источники информации, разрабатывать план или последовательность шагов, ведущих к решению проблемы.

## Оцениваемые компетенции (мыслительная деятельность+объект оценки):

### Кодификатор умений и компетенций, характеризующих математическую грамотность учащихся

с учётом специфики исследования PISA-2021 математической грамотности 15-летних учащихся и требований ФГОС основного общего образования к метапредметным и предметным (математика) образовательным результатам.

	Оцениваемые компетенции, умения	Характеристика возможного учебного задания
<b>1</b>	<b>Компетенция: формулировать ситуацию на языке математики.</b>	
1.1	Определять необходимые разделы программного курса математики, из которых необходимо извлечь математические знания для анализа и решения проблемы.	Предполагается выделить основные компоненты (величины, неизвестные), участвующие в описанной ситуации и определить какими математическими соотношениями они между собой связаны.
1.2	Перевод проблемы из реального мира в область математики.	Предполагается придание проблеме математической структуры с учётом всех ограничений и допущений ей присущих.
<b>2</b>	<b>Компетенция: применять математические понятия, факты, процедуры.</b>	
2.1	Проводить необходимые арифметические вычисления.	Предполагается составление числового выражения и выполнение необходимых арифметических операций с рациональными числами, выполнение реальных расчётов.
2.2	Работать с процентами.	Предполагается вычисление процентов как простых, так и сложных, в том числе возможен расчёт процентного изменения конкретных величин.
2.3	Работать с единицами измерения.	Предполагается преобразование единиц длины, времени, массы из более крупных в более мелкие и наоборот.
2.4	Выполнять приближённые вычисления.	Предполагается прикидка и оценка результатов вычислений, округление результата с заданной точностью, а также с учётом условий описанной ситуации по недостатку или избытку.
2.5	Выполнять расчёты по формулам. Решать уравнения и их системы.	Предполагается выполнить расчёты по предложенным формулам или по формулам, которые были определены из программного курса математики для решения поставленной задачи. Решать уравнения и их системами известными способами.
2.6	Делать логические заключения с учётом математических допущений.	Предполагается проверка истинности утверждений, анализ и обоснование выводов, утверждений, результатов.

2.7	Анализировать данные.	Предполагается извлечение и анализ математической информации из текста, таблиц, графиков, диаграмм, графических карт, рисунков и фотографий.
2.8	Применять язык геометрии.	Предполагается построение геометрических фигур, учёт и использование из свойств для решения поставленной задачи. Представление и манипуляция геометрическими формами в пространстве.
2.9	Строить последовательности, определять комбинации, выполнять статистические расчёты.	Предполагается выявление зависимостей между значениями величин, использование свойств прогрессий, применение элементов комбинаторики, метода перебора, расчёт основных статистических характеристик: среднего арифметического, моды, медианы, наибольшего и наименьшего значения данных.
<b>3</b>	<b>Компетенция: интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты.</b>	
3.1	Интерпретировать результат решения математической модели и делать соответствующие выводы.	Предполагается перевод математического решения в контекст поставленной проблемы, и оценка того, являются ли результаты математического решения или рассуждений разумными и имеют смысл в контексте этой проблемы.
3.2	Распознавать зависимости и интерпретировать данные.	Предлагается формулировать выводы на основе интерпретации данных, представленных в различных формах: графики, таблицы, диаграммы, фотографии, географические карты, словестный текст. Данные могут быть представлены в сочетании форм.
3.3	Преобразовывать одну форму представления данных в другую.	Предлагается преобразовать одну форму представления научной информации в другую. Например, словестную в схематический рисунок, табличную форму в график или диаграмму и т.д.
3.4	Оценивать с научной точки зрения аргументы и доказательства из различных источников.	Предлагается оценить с научной точки зрения корректность и убедительность утверждений, содержащихся в различных источниках, например, научно-популярных текстах, сообщениях СМИ, высказываниях людей.
<b>4</b>	<b>Компетенция: рассуждать в процессе математического моделирования ситуации.</b>	
4.1	Логика.	Предполагается сделать несложный вывод. Выбрать, дать соответствующее обоснование. Размышлять над аргументами, рассуждениями и выводами математического результата.

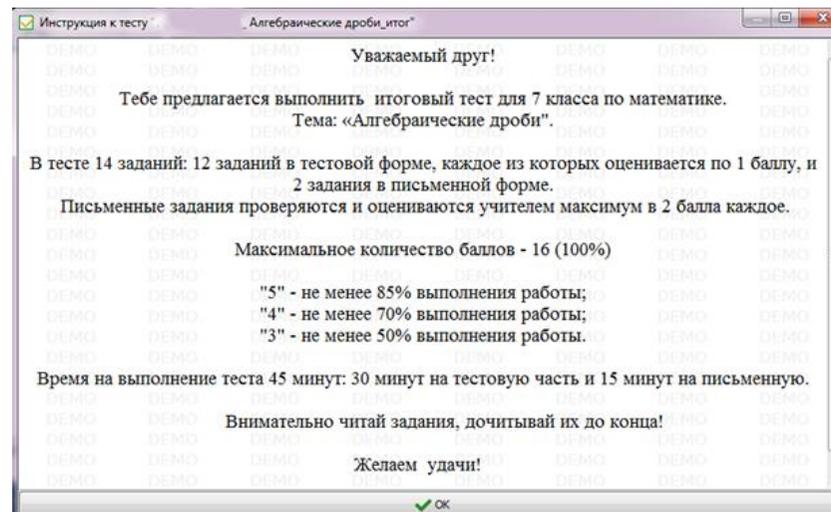
4.2	Рассуждать «над формулированием».	Предполагается представление ситуации различными способами, в том числе в соответствии с различными математическими теориями, выполнение соответствующих допущений. Объяснение и защита (обоснование) созданных представлений. Анализ схожего и различий между моделью и математической задачей, которую она моделирует. Определение, критика ограничения модели. Объяснение отношений между контекстно-обусловленным языком проблемы и формально-символическим языком её представления на языке математики.
4.3	Рассуждать «над решением».	Предполагается понимание и использование определения, правила, алгоритмов и формальных систем. Объяснение, как алгоритм работает, обнаружение и исправление ошибок в алгоритмах и процедурах. Обоснование выбираемой и предложенной процедуры и модели с точки зрения получения результата. Размышление над математическим решением и создание объяснения и аргументации, которые его поддерживают или опровергают.
4.4	Рассуждать «над результатом».	Предполагается аргументация результата математически. Объяснение его разумности в рамках ситуации. Интерпретация математического результата в контексте ситуации в целях объяснения полученного результата.

## «Тестирование»

В некоторых школах в течении учебного года проводится компьютерное тестирование по различным предметам. Обычно в конце изучения каждой темы проводится итоговый тест, который содержит как тестовую часть, так и письменную. Баллы за письменную часть заранее закладываются в тест. После проверки письменной части учителем, баллы за тестовую и письменную части суммируются.



**Вопрос 1.** Алексей, ученик 7 класса, пришёл сдавать тест по математике. При запуске программы перед ним раскрылась следующая инструкция:



Алексей решил, что максимальная отметка, которую он может получить, не выполняя письменную часть это «4». Прав ли он? (Да/Нет) Свой ответ обоснуйте.

**Вопрос 2.** После выполнения теста перед учеником появился результат:



Алексей старается получать только пятёрки. Определите, какое наименьшее количество баллов для получения пятёрки он должен заработать за письменную часть? При этом известно, что за одно задание в письменной части учитель может выставить 0 баллов, 1 балл или 2 балла.

**Характеристика задания.**

**Содержательная область:** изменение и зависимости.

**Контекст:** образование.

**Компетенция (мыслительная деятельность):**

**Вопрос 1:** применять

**Вопрос 2:** рассуждать

**Объект оценки:**

**Вопрос 1:** 2.2 работать с процентами

**Вопрос 2:** 4.3 рассуждать «над решением»

**Уровень сложности:**

**Вопрос 1:** средний

**Вопрос 2:** высокий

**Форма ответа:**

**Вопрос 1:** выбор одного верного ответа в выпадающем меню (Да/Нет) + развёрнутый ответ

**Вопрос 2:** развёрнутый ответ

## Критерии оценки:

Вопрос 1

Вариант ответа	Балл
<p>Выбрано «Да» и дано одно из следующих объяснений:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ согласно инструкции, «4» ставится начиная с 70%. Найдём 70% от 16 баллов: <math>16 \cdot 0,7 = 11,2</math> балла. А так как максимальный балл за тестовую часть – 12, то выполнив её без ошибок Алексей получит «4».</li> <li>❖ максимальное количество баллов в работе 16, а в тестовой части 12, поэтому полностью выполненная тестовая часть составляет <math>(12 : 16) \cdot 100\% = 75\%</math> всей работы, что соответствует отметке «4»;</li> <li>❖ максимальное количество баллов в работе 16 (100%), поэтому на 1 балл приходится <math>100 : 16 = 6,25\%</math>; тестовая часть оценивается в 12 баллов, поэтому она составляет <math>12 \cdot 6,25 = 75\%</math> всей работы, что соответствует отметке «4».</li> </ul>	1
<p>Выбрано «Нет» или выбрано «Да» и объяснение не дано, либо приведены только расчёты без пояснений, либо дано неверное объяснение.</p>	0

Вопрос 2

Вариант ответа	Балл
<p>Дан ответ «3 балла» и приведено одно из следующих решений:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ согласно инструкции, «5» ставится начиная с 85%. Найдём 85% от 16 баллов: <math>16 \cdot 0,85 = 13,6</math> балла. Так как учитель при проверке выставляет только целые значения баллов, то чтобы получить «5» нужно набрать 14 баллов минимум за работу. Получаем, что Алексею нужно набрать минимум <math>14 - 11 = 3</math> балла за письменную часть для получения «5».</li> <li>❖ минимальный процент для получения «5» - 85%, Алексею не хватает <math>85\% - 68,8\% = 16,2\%</math>; 1 балл составляет <math>100 : 16 = 6,25\%</math>, значит до пятёрки не хватает минимум <math>16,2 : 6,25 = 2,592 \approx 3</math> балла;</li> <li>❖ за письменную часть Алексей может получить 0 баллов, 1 балл, 2 балла, 3 балла или 4 балла. Если он получит 1 балл, то общий балл за работу будет равен 12 баллам, что составит <math>(12 : 16) \cdot 100\% = 75\%</math> всей работы – это «4». Если он получит 2 балла, то общий балл за работу будет равен 13 баллам, что составит <math>(13 : 16) \cdot 100\% = 81,25\%</math> всей работы – это тоже «4». А если он получит 3 балла за письменную часть, то общий балл будет равен 14 баллов, что составит <math>(14 : 16) \cdot 100\% = 87,5\%</math> - это «5». Значит, наименьшее количество баллов, необходимое Алексею до «5» это 3 балла.</li> </ul>	2
<p>Приведено одно из вышеописанных решений, но допущена одна арифметическая ошибка, не влияющая на общий ход рассуждения. Возможен неверный ответ.</p>	1
<p>Дан неверный ответ, или дан неверный ответ с неверным ходом решения и расчётами, или приведён только ответ без подтверждающих расчётов и пояснений, или приведены только расчёты без соответствующих пояснений.</p>	0

## «Семейный ужин в кафе»



Семья Скворцовых решила поужинать в кафе. Официант принёс меню, которое содержало все возможные к заказу блюда на этот вечер:

<b>МЕНЮ</b>	
<b>Наименование блюда</b>	<b>Стоимость</b>
Салат «Греческий»	200
Салат «Оливье»	180
Рис отварной	40
Картофельное пюре	40
Картофель фри	80
Мясная отбивная	350
Стейк из красной рыбы	500
Спагетти с мясом	260
Спагетти с грибами	240
Домашнее жаркое с картофелем, мясом и грибами	380
Плов с бараниной	220
Пицца «Три сыра»	280
Пицца «Грибная бьянка»	310
Кофе	140
Чай	50
Сок	80
Морс	50

**Вопрос 1.** Какие варианты заказов могут сделать в этот вечер Скворцовы, если их вкусовые предпочтения указаны в таблице и сумма, которую они планируют потратить не превышает 2300 рублей?

Семья Скворцовых	
Члены семьи	Вкусовые предпочтения
Мама	Салат
Папа	Мясо
Сын	Пицца

Выберите возможные варианты:

- А. Отбивная, рис, салат «Греческий», стейк – 2шт., картофель фри, пицца «Три сыра», кофе – 2шт, сок.
- Б. Жаркое – 2шт., плов, пицца «Грибная бьянка», пицца «Три сыра», кофе, сок – 2шт.
- В. Спагетти с мясом – 2шт., стейк, салат греческий – 2шт., картофельное пюре, пицца «Грибная бьянка», сок – 3шт., кофе.
- Г. Стейк – 3шт., салат греческий – 2шт., рис, картофель фри, пицца «Три сыра», морс – 3 шт.
- Д. Пицца «Три сыра», спагетти с грибами – 2 шт., плов с бараниной, салат «Оливье» - 2шт., кофе, чай, сок.

**Вопрос 2.**

После вкусного ужина папа решил оставить «чаевые» официанту в размере 10 % от суммы заказа. Уложатся ли Скворцовы, учитывая «чаевые», в сумму которую планировали потратить, если сделают заказ Д из вопроса 1. Ответ объясните.

### Вопрос 3.

Сын Витя прочитал на рекламном буклете в кафе, что в 2012 году в Италии была изготовлена самая большая пицца попавшая в «Книгу рекордов Гиннеса». Её вес составлял 16 тонн, а диаметр 43 м.



Витя решил посчитать сколько пицц стандартного диаметра 30 см. поместилось бы в эту гигантскую пиццу. Помогите Вите правильно посчитать. Решение запишите.

#### Характеристика задания.

#### Содержательная область:

**Вопрос 1:** количество

**Вопрос 2:** количество

**Вопрос 3:** изменение и зависимости

#### Контекст:

**Вопрос 1:** личная жизнь.

**Вопрос 2:** личная жизнь

**Вопрос 3:** общественная жизнь

**Компетенция (мыслительная деятельность):****Вопрос 1:** рассуждать**Вопрос 2:** применять**Вопрос 3:** формулировать**Объект оценки:****Вопрос 1:** 4.4 рассуждать «над результатом».**Вопрос 2:** 2.2. работать с процентами.**Вопрос 3:** 1.2. перевод проблемы из реального мира в область математики.**Уровень сложности:****Вопрос 1:** средний**Вопрос 2:** средний**Вопрос 3:** средний**Форма ответа:****Вопрос 1:** множественный выбор (выбор нескольких верных ответов из предложенных вариантов)**Вопрос 2:** развёрнутый ответ**Вопрос 3:** развёрнутый ответ**Критерии оценки:****Вопрос 1**

Вариант ответа	Балл
Выбрано <i>В</i> и <i>Д</i> . (Даны оба правильных ответа, других ответов нет)	2
Выбрано или <i>В</i> или <i>Д</i> . (Дан только один правильный ответ, других ответов нет)	1
Выбраны другие варианты ответов.	0

**Вопрос 2**

Вариант ответа	Балл
Дан ответ «Да» и приведено одно из следующих решений: ❖ Сумма заказа <i>Д</i> составляет: $280+2*240+220+2*180+140+50+80=1610$ руб. «Чаевые» - 10% от суммы заказа – $1610*0,1=161$ , сумма заказа с «чаевыми» $1610+161=1771$ р. , $1771 < 2300$ . ❖ Сумма заказа <i>Д</i> составляет: $280+2*240+220+2*180+140+50+80=1610$ руб. Заказ и «чаевые» составляют 110%, $1610* 1,1=1771$ руб. $1771 < 2300$ .	2

Приведено одно из вышеописанных решений, но допущена одна арифметическая ошибка, не влияющая на общий ход рассуждения. Возможен неверный ответ.	1
Дан неверный ответ, или дан неверный ответ с неверным ходом решения и расчётами, или приведён только ответ без подтверждающих расчётов и пояснений, или приведены только расчёты без соответствующих пояснений.	0

### Вопрос 3

Вариант ответа	Балл
Дан ответ «20544» или «примерно 20544» и приведено решение: ❖ $S = \pi R^2$ ; $S = 21,5^2 \pi = 462,25 \pi$ (м2) площадь пиццы-гиганта. $R=30:2=15$ см= $0,15$ м – радиус стандартной пиццы, $S = 0,15^2 \pi = 0,0225 \pi$ (м2) площадь стандартной пиццы. $462,25 \pi / 0,0225 \pi \approx 20544$ шт.	2
Приведено вышеописанное решение, но допущена одна арифметическая ошибка, не влияющая на общий ход рассуждения. Возможен неверный ответ.	1
Дан неверный ответ, или дан неверный ответ с неверным ходом решения и расчётами, или приведён только ответ без подтверждающих расчётов и пояснений, или приведены только расчёты без соответствующих пояснений.	0