

## **Класс 9.3.2 (гуманитарный профиль)**

**Учебник: Алгебра (Дорофеев Г.В.)**

### **Тема модуля: «Рациональные уравнения и системы уравнений»**

***Основные теоретические сведения, необходимые для успешного выполнения теста:***

1. Понятие рационального выражения.
2. Понятия целого и дробного рационального выражения.
3. Область определения выражения.
4. Тождество. Схема доказательства тождеств.
5. Понятия целого и дробного уравнения. Степень уравнения.
6. Приёмы решения целых рациональных уравнений: разложение на множители и введение новой переменной.
7. Алгоритм решения дробного рационального уравнения.
8. Графический метод решения систем уравнений. Уравнения, определяющие прямую, параболу, гиперболу, окружность и др.
9. Методы подстановки и сложения при решении систем уравнений.

### **В процессе изучения данного модуля ученик**

***научится:***

1. выделять среди рациональных выражений целые и дробные;
2. находить область определения рациональных выражений;
3. находить значения рациональных выражений при заданных значениях переменных;
4. преобразовывать целое выражение в многочлен стандартного вида, используя правила сложения, вычитания и умножения многочленов, в том числе формулы сокращённого умножения и наоборот;
5. упрощать дробные рациональные выражения, выполняя сложение, вычитание, умножение и деление рациональных выражений;
6. выполнять простейшие доказательства тождеств;
7. узнавать и различать целые и дробные уравнения;
8. оперировать понятиями "корень уравнения", "решение уравнения"; решать простейшие уравнения первой и второй степени;
9. применять метод разложения на множители при решении целых уравнений степени выше второй;
10. применять метод замены переменной при решении целых уравнений;
11. применять алгоритм решения дробных рациональных уравнений при их решении;
12. оперировать понятиями "система уравнений", "решение системы уравнений"; понимать геометрический смысл решения системы уравнений;

13. определять уравнения, задающие прямую линию, параболу, гиперболу, окружность; определять число решений уравнений и систем уравнений, используя графический метод;
14. решать простейшие системы двух линейных уравнений с двумя переменными методами подстановки и сложения;
15. решать простейшие системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными методом подстановки;
16. находить точки пересечения линий, задающихся известными уравнениями по-средством решения систем этих уравнений.

**получит возможность научиться:**

1. выполнять многошаговые тождественные преобразования рациональных выражений на основе правил действий над многочленами и дробными выражениями;
2. решать текстовые задачи алгебраическим методом;
3. решать графическим методом уравнения и системы уравнений, содержащих модуль и иррациональные выражения;
4. решать уравнения с параметром.

**В тесте проверяются умения категории "ученик научится".**

***Примерные практические задания, согласно определённым умениям.***

**1. Выделять среди рациональных выражений целые и дробные.**

**1.1.** Какие из следующих выражений являются целыми, а какие дробными?

a)  $x^2 - 3$ ; б)  $\frac{2}{x-3}$ ; в)  $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1$ ; г)  $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$ ; д)  $5a^2bc^3$ .

**1.2.** Какое из данных выражений является целым?

а)  $\frac{2a}{4-a}$ ; б)  $\frac{a-4}{2a}$ ; в)  $\frac{a-4}{2}$ ; г)  $\frac{2}{a-4}$ .

**1.3.** Какие из данных выражений являются дробными?

а)  $\frac{5b}{3-b}$ ; б)  $\frac{b-3}{5b}$ ; в)  $\frac{b-3}{5}$ ; г)  $\frac{5}{b-3}$ .

**1.4.** Какое из выражений не является целым?

а)  $a^2 + 5$ ; б)  $a^2 + 5a$ ; в)  $a^2 - \frac{5}{a}$ ; г)  $a^2 - \frac{a}{5}$ .

## 2. Находить область определения рациональных выражений.

**2.1.** Найдите область определения следующих рациональных выражений:

1)  $x^2 + 3x - 5$ ; 5)  $\frac{\frac{1}{x+2}-1}{3x-6}$ . 9)  $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+3}$ ;

2)  $\frac{a^2}{5} + 3a$ ; 6)  $\frac{2}{x^2+9}$ ; 10)  $\frac{5}{4-y} + \frac{6}{y+6}$ ;  
3)  $\frac{5b-4}{(b-5)(b+2)}$ ; 7)  $2a^{-1} + 1$ ; 11)  $\frac{a-3}{4-3a-a^2}$ ;  
4)  $0,5x^2 - 2x + 2$ ; 8)  $\frac{z-4}{12z+3z^2}$ ; 12)  $\frac{z^2-3}{z^2+3}$ .

**2.2.** Какое из данных выражений имеет смысл при любых значениях переменной?

а)  $\frac{2}{9-x^2}$ ; б)  $\frac{2}{(9+x)^2}$ ; в)  $\frac{2}{9+x^2}$ ; г)  $\frac{2}{9x^2}$ .

**2.3.** Какое из данных выражений не имеет смысла как при  $x = 3$  так и при  $x = -1$ ?

а)  $\frac{x-1}{(x-3)(x+1)}$ ; б)  $\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$ ; в)  $\frac{x-1}{(x+3)(x+1)}$ ; г)  $\frac{x+1}{(x-3)(x-1)}$ .

**2.4.** Какое из данных выражений не имеет смысла только при  $x = 3$ ?

а)  $\frac{x-1}{x-3}$ ; б)  $\frac{x+1}{x+3}$ ; в)  $\frac{x-3}{x+1}$ ; г)  $\frac{x+3}{x-1}$ .

**2.5.** Какое из данных выражений не имеет смысла только при  $x = -1$ ?

а)  $\frac{x-1}{x-3}$ ; б)  $\frac{x+1}{x+3}$ ; в)  $\frac{x-3}{x+1}$ ; г)  $\frac{x+3}{x-1}$ .

**2.6.** Какие из данных выражений не имеют смысла при  $x = 0$ ?

а)  $\frac{x}{x+2}$ ; б)  $\frac{x+2}{x}$ ; в)  $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$ .

## 3. Находить значения рациональных выражений при заданных значениях переменных.

**3.1.** Найдите значение выражения:

а)  $\frac{3a^2-a}{4}$  при  $a = \frac{1}{3}$ ;

б)  $\frac{ab-1}{ab+1}$  при  $a = -5, b = 0.4$ ;

в)  $\frac{c+a}{c-a}$  при  $a = 1,1$  и  $c = -0,7$ .

3.2. Заполните таблицу

$a$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	4	100
$a^2 - 4$								

4. Преобразовывать целое выражение в многочлен стандартного вида, используя правила сложения, вычитания и умножения многочленов, в том числе формулы сокращённого умножения и наоборот (разложение на множители).

4.1. В выражении  $27a^2 - 9ac$  вынесли за скобки общий множитель  $-9a$ . Какой двучлен остался в скобках?

4.2. Упростите выражение

- б)  $(3m - 2n)(3m + 2n) + (m - 3n)^2 - (5m - n)(2m - 5n)$ ;  
в)  $(3a - 5c)^2 + (2a + 9c)^2 - (2a + 3c)(27c - 16a)$ .

4.3. Упростите выражение  $(a - 1)(a + 1) - (a - 1)^2 - a$  и найдите его значение при  $a = -0,5$ .

5. Упрощать дробные рациональные выражения, выполняя сложение, вычитание, умножение и деление рациональных выражений.

5.1. Сократите дробь

а)  $\frac{ab - a^2}{a^2 - b^2}$ ; б)  $\frac{b^2 - c^2}{bc - b^2}$ .

5.2. Упростите выражение

а)  $\frac{2c^2}{a+c}$ ; б)  $\frac{10x^2}{x-y}$ : 5xy.

5.3.

Упростите выражение  $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$ .

1)  $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$     2) 1    3)  $\frac{x+y}{x-y}$     4) -1

5.4.

Упростите выражение  $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x}$ .

1)  $-\frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$     2) -1    3)  $\frac{y-x}{y+x}$     4) 1

**5.5.** Упростите выражение

а)  $\left( \frac{2}{b-a} - \frac{1}{b} \right) \cdot \left( \frac{a^2+b^2}{a+b} - a \right);$

б)  $\frac{(3a^2b^{-3})^4 \cdot (2a^{-5}b^2)}{27a^3b^{-11}};$

в)  $\frac{x^2-2x-3}{x+1} - \frac{2x^2-5x+2}{x-2};$

г)  $\frac{a^2-1}{a^2} - \frac{a^2-9}{a} \cdot \frac{1}{a+3};$

д)  $\left( \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right) : \frac{4}{x^2-y^2}.$

**5.6.** Упростите выражение и найдите его значение

а)  $\frac{xy+y^2}{15x} \cdot \frac{3x}{x+y}$  при  $x = 24$  и  $y = 2,5$ ;

б)  $(x-5) : \frac{x^2-10x+25}{x+5}$  при  $x = 25$ .

## 6. Выполнять простейшие доказательства тождеств.

### 6.1.

Какое из выражений равно дроби  $\frac{c-x}{b-y}$ ?

- 1)  $\frac{x-c}{b-y}$       2)  $\frac{c-x}{y-b}$       3)  $-\frac{x-c}{b-y}$       4)  $-\frac{x-c}{y-b}$

### 6.2.

Какое из перечисленных равенств является тождеством?

- 1)  $(a-c)(c-a) = a^2 - c^2$   
2)  $(a-c)(c-a) = 2ac$   
3)  $(a-c)(c-a) = -(c-a)^2$   
4)  $(a-c)(c-a) = (a-c)^2$

### 6.3.

Какое из равенств не является тождеством?

- 1)  $a - b = -(b - a)$       3)  $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a - b$   
2)  $(a - b)^2 = (b - a)^2$       4)  $(b + a)(a - b) = b^2 - a^2$

### 6.4.

Какая из дробей не равна выражению  $\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{1}{2-x}$ ?

- 1)  $\frac{1}{2x-x^2}$       2)  $\frac{2x-1}{x^2-2x}$       3)  $-\frac{1}{x(x-2)}$       4)  $\frac{1}{x(2-x)}$

## 6.5. Докажите верность тождества или опровергните его

- а)  $(b - x)(x - b) = b^2 - x^2$ ;  
б)  $(a - x)(x - a) = -(a - x)^2$ ;  
в)  $x(x - y) - y(x + y) = x^2 - y^2$ ;  
г)  $(x - 4)^2 = x^2 - 16$ .

д)  $(a^2 - 4)(a - 2)^{-1} - (a^2 - 6a + 9)(a - 3)^{-1} = 5$ ;

е)  $\frac{(5 - x)^2}{2x} \cdot \left( \frac{x}{x^2 - 25} - \frac{x}{(x - 5)^2} \right) + \frac{5}{5 + x} = 0$ .

## 7. Узнавать и различать целые и дробные уравнения.

7.1. Какие из следующих уравнений являются целыми, а какие дробными?

а)  $\frac{2}{x} + x = -2$ ;

б)  $\frac{x^2}{2} - 3x = 0$ ;

в)  $2x^2 = 3x + 7$ ;

г)  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ ;

д)  $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 3$ ;

е)  $\frac{x^3 + 5x}{7} - \frac{x}{2} = 0$ .

## 8. Определять понятиями "корень уравнения", "решение уравнения"; решать простейшие уравнения первой и второй степени.

### 8.1.

Поставьте в соответствие каждому уравнению множество его корней.

А)  $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = 0$       Б)  $\frac{x(x^2-1)}{x+1} = 0$       В)  $\frac{x^2-1}{x(x+1)} = 0$

- 1) 1      2) 0      3) 0; 1

8.2. Найдите корни уравнения  $2x(x + 2)(x - 3) = 0$ .

8.3. Сколько корней имеет уравнение  $x^4 - x^2 = 0$ ?

### 8.4.

Какое из уравнений имеет три корня?

1)  $\frac{x^2+1}{x-1} = 0$       3)  $\frac{x(x^2+4)}{x-1} = 0$

2)  $\frac{x(x^2-1)}{x-1} = 0$       4)  $\frac{x(x^2-4)}{x-1} = 0$

### 8.5. Решите уравнения

а)  $2x - 9 = 3x + 16$ ;

д)  $\frac{t-2}{4} = \frac{5-2t}{-4}$ ;

б)  $\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} = 2$ .

е)  $\frac{x^2-8}{4} - x = \frac{x+1}{3} - 4$ ;

в)  $3x^2 + x = 6x + 2$ ;

г)  $3 - \frac{x}{7} = \frac{x}{3}$ .

ж)  $(2x - 1)(x + 2) - \frac{x}{2} = -2$ .

з)  $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} + x = -\frac{29}{6}$ .

## 9. Применять метод разложения на множители при решении целых уравнений степени выше второй.

### 9.1. Решите уравнения

а)  $x^3 - 9x = 0$ ;

б)  $x^4 + 3x^2 = 0$ ;

в)  $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$ .

г)  $x^3 = x^2 - 7x + 7$ ;

д)  $x^3 + 2x^2 = 0$ ;

е)  $x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0$ .

ж)  $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$ ;

з)  $(2x - 3)^2 = (1 - 2x)^2$ .

## 10. Применять метод замены переменной при решении целых уравнений.

### 10.1. Решите биквадратные уравнения

а)  $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ ;

б)  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ ;

в)  $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$ .

г)  $(x + 1)^4 + (x + 1)^2 - 6 = 0$ .

## 11. Применять алгоритм решения дробных рациональных уравнений при их решении.

### 11.1. Решите уравнения

а)  $\frac{3}{x+2} - 5 = \frac{4}{x-2}$ ;

б)  $\frac{x-3}{x} + \frac{7}{x+3} = \frac{5}{4}$ ;

в)  $x + \frac{4}{x} = 4$ ;

г)  $\frac{x^2 - 7x - 8}{x+1} = 0$ ;

д)  $\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} = 1$ .

е)  $\frac{x}{x-2} = \frac{10}{x+1}$ ;

ж)  $\frac{1-x}{2-x} = 2$

з)  $\frac{2x}{3-x} + \frac{6}{x-3} = x - 4$ ;

и)  $\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2$ .

к)  $\frac{5x^2 + 2x - 24}{x-5} = 0$ .

## 12. Определять понятиями "система уравнений", "решение системы уравнений", понимать геометрический смысл решения системы уравнений.

### 12.1. Какие из указанных пар чисел являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

а) (4; 1);

б) (6; -1);

в) (3; 2);

г) (-3; -2).

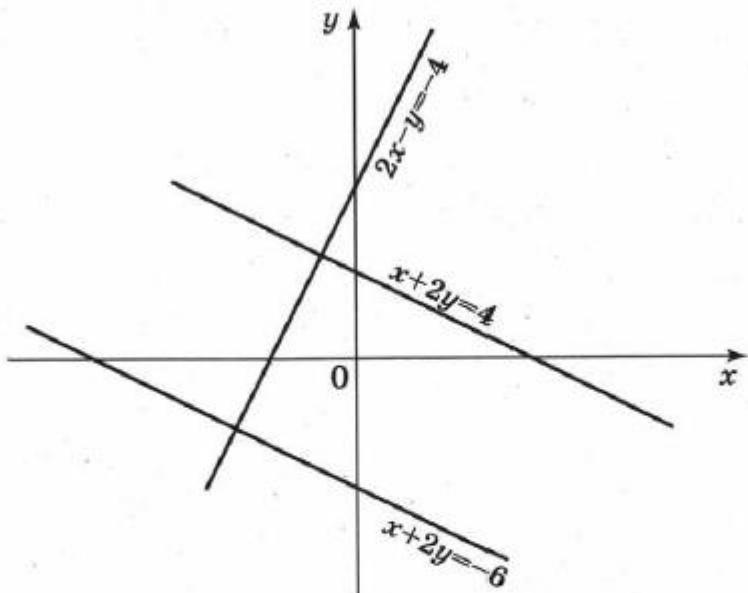
**12.2.** Какие из указанных чисел являются решением данной системы уравнений

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 3y) = 15 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

- а)  $(-2,8; 5,8)$ ,  $(3; 0)$ .      б)  $(3,7; -0,7)$ ,  $(5; -2)$ .      в)  $(3,5; -0,5)$ ,  $(2; 1)$ .

**12.3.**

Используя уравнения прямых, изображённых на рисунке, составьте систему уравнений, решением которой является пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих условию  $x < 0$ ,  $y > 0$ .



1)  $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -6 \end{cases}$

4) такой системы нет

**13.** Определять уравнения, задающие прямую линию, параболу, гиперболу, окружность; определять число решений уравнений и систем уравнений, используя графический метод.

**13.1.** Поставить в соответствие каждому уравнению линию, которую оно задаёт.

а)  $4x^2 - 2x + 3 = y$ ;      б)  $x - 2y = 6$ ;      в)  $xy = 4$ ;      г)  $x^2 + y^2 = 9$ ;

- 1) прямая линия;      2) окружность;      3) парабола;      4) гипербола.

**13.2.** В одной системе координат изобразите графики двух данных уравнений. Сколько общих точек у этих графиков?

а)  $7x - 9y = 63$  и  $x - 9y = -18$ ;  
 б)  $y = x^2 + 4$  и  $y = -x^2 + 8x - 12$ ;  
 в)  $x^2 + y^2 = 25$  и  $xy = 6$ ;

г)  $4x + y = x^2$  и  $y = -4$ ;  
 д)  $xy = 8$  и  $x^2 - 2x + y - 9 = 0$ ;  
 е)  $x^2 - y^2 = 0$  и  $y - x = 5$ .

**13.3.**

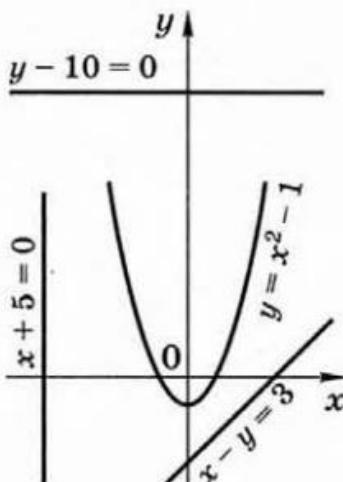
Поставьте в соответствие каждой системе уравнений число её решений.

**A)**  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$       **Б)**  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$       **В)**  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$

- 1) решений нет
- 2) одно решение
- 3) два решения
- 4) три решения

**13.4.**

На рисунке изображена парабола и три прямые. Запишите систему уравнений, содержащую пару уравнений с рисунка, которая не имеет решений.



**13.5.**

Для каждой системы уравнений укажите число её решений (используйте графические соображения).

**А)**  $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -5x \end{cases}$       **Б)**  $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 5 - x \end{cases}$       **В)**  $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 5 \end{cases}$

- 1) 1 решение
- 2) 2 решения
- 3) 3 решения
- 4) нет решений

### 13.6.

Какой из систем уравнений соответствует рисунок 24?

А.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + y = 5. \end{cases}$

Б.  $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

В.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 6. \end{cases}$

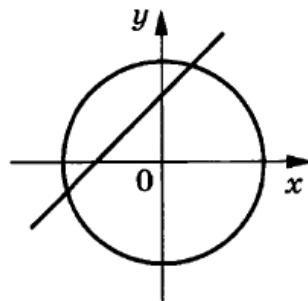


Рис. 24

### 13.7.

С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение  $\frac{1}{x} = 4 - x^2$ .

13.8. Используя графики, решите уравнение  $x^3 = \frac{1}{x}$ .

13.9. Решите систему уравнений графическим методом

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

## 14. Решать простейшие системы двух линейных уравнений с двумя переменными методами подстановки и сложения.

Решите системы линейных уравнений. В ответе к каждой системе запишите значения суммы и разности её решений.

а)

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - y = -5; \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} t - 5s = 0 \\ 2t - s = 9; \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} \frac{x+z}{2} = 1 \\ x - z = 3; \end{cases}$$

д)

$$\begin{cases} 3m - 4n = 20 \\ m + 2n = 0; \end{cases}$$

## 15. Решать простейшие системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными методом подстановки.

Решите систему уравнений:

а)  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = 12; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -14; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x - y = 4. \end{cases}$

## 16. Находить точки пересечения линий, задающихся известными уравнениями посредством решения систем этих уравнений.

16.1. Вычислите точки пересечения прямых  $2x - y = -4$  и  $x + 2y = 4$  не выполняя построений.

**16.2.** Вычислите координаты точек пересечения параболы  $y = 2x^2 - 5$  и прямой  $y = 4x - 5$ .

**16.3.** Вычислите точки пересечения гиперболы  $xy = 6$  и прямой  $y = x - 1$ .