

10.2 классы (ен, сэ)

2021-2022 уч.год

Банк заданий по математике для подготовки к тестированию

(учебник Никольский С.М., углублённый уровень)

Тема модуля № 5 «Тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения и неравенства»

(Глава II. §10, §11)

ТЕМА	Обучающийся научится:	Получит возможность:
<b>ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.</b>	Определять функции $y = \sin x$ , $y = \cos x$ , $y = \operatorname{tg} x$ , $y = \operatorname{ctg} x$ , их свойства и графики, обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$ , $y = \arccos x$ , $y = \operatorname{arctg} x$ , $y = \operatorname{arccot} x$ , их свойства и графики. Строить графики изучаемых функций; определять их промежутки возрастания и убывания; сравнивать значения функций	Читать графики тригонометрических функций, свойства функций по графикам, использовать графики тригонометрических функций для решения и для отбора корней тригонометрических уравнений и неравенств.
<b>ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА</b>	Решать простейшие тригонометрические уравнения: определять, какие уравнения называют простейшими тригонометрическими, выбирать приемы решения тригонометрических уравнений. Узнавать уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного. Применять основные тригонометрические формулы, формулы сложения и другие формулы для решения уравнений. Применять приемы понижения кратности угла и понижения степени уравнения. Определять, какое уравнение называют тригонометрическим однородным, узнавать и решать однородные уравнения. Решать простейшие неравенства для синуса и косинуса, для тангенса и котангенса. Выбирать способы решения тригонометрических неравенств; однородных тригонометрических уравнений и неравенств; неравенств, сводящихся к простейшим заменой переменного. Вводить вспомогательный угол. Использовать замену неизвестного $t = \sin x + \cos x$ .	Решать любые тригонометрические уравнения; применяя метод замены неизвестного, основные тригонометрические формулы для решения уравнений; отбирать корни тригонометрических уравнений согласно заданным условиям различными способами. Решать неравенства, опираясь на графики, на единичную окружность; использовать знания для построения простейших математических моделей; решать неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного.

# **ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)**

ТЕМА	ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)
Тригонометрические функции	<p>1. Сравните:</p> <p>а) <math>\sin \frac{\pi}{7}</math> и <math>\sin \frac{3\pi}{7}</math>;      б) <math>\sin \left(-\frac{\pi}{8}\right)</math> и <math>\sin \left(-\frac{3\pi}{8}\right)</math>;</p> <p>в) <math>\sin \frac{\pi}{15}</math> и <math>\sin \left(-\frac{7\pi}{15}\right)</math>;      г) <math>\sin \frac{3\pi}{5}</math> и <math>\sin \frac{4\pi}{5}</math>;</p> <p>д) <math>\sin \frac{7\pi}{12}</math> и <math>\sin \frac{11\pi}{12}</math>;      е) <math>\sin \frac{8\pi}{9}</math> и <math>\sin \frac{7\pi}{9}</math>.</p>
	<p>2. Сравните:</p> <p>а) <math>\cos \frac{3\pi}{7}</math> и <math>\cos \frac{2\pi}{7}</math>;      б) <math>\cos \left(-\frac{\pi}{7}\right)</math> и <math>\cos \left(-\frac{2\pi}{7}\right)</math>;</p> <p>в) <math>\cos \frac{\pi}{8}</math> и <math>\cos \frac{5\pi}{8}</math>;      г) <math>\cos \left(-\frac{5\pi}{7}\right)</math> и <math>\cos \left(-\frac{3\pi}{7}\right)</math>;</p> <p>д) <math>\cos \frac{13\pi}{12}</math> и <math>\cos \frac{23\pi}{12}</math>;      е) <math>\cos \frac{\pi}{9}</math> и <math>\cos \frac{5\pi}{9}</math>.</p>
	<p>3. Сравните:</p> <p>а) <math>\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}</math> и <math>\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}</math>;      б) <math>\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)</math> и <math>\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{8}\right)</math>;</p> <p>в) <math>\operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}</math> и <math>\operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}</math>;      г) <math>\operatorname{tg} \frac{11\pi}{10}</math> и <math>\operatorname{tg} \frac{13\pi}{10}</math>;</p> <p>д) <math>\operatorname{tg} \frac{\pi}{11}</math> и <math>\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12}</math>;      е) <math>\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}</math> и <math>\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)</math>.</p>
	<p>4. Сравните:</p> <p>а) <math>\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}</math> и <math>\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}</math>;      б) <math>\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)</math> и <math>\operatorname{ctg} \left(-\frac{6\pi}{7}\right)</math>;</p> <p>в) <math>\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}</math> и <math>\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9}</math>;      г) <math>\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}</math> и <math>\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{10}</math>;</p> <p>д) <math>\operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}</math> и <math>\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{12}</math>;      е) <math>\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}</math> и <math>\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)</math>.</p>
	<p>5. Расположите в порядке возрастания числа:</p> <p><math>\cos 1,5</math>; <math>\cos(-1,3)</math>; <math>\cos \frac{3\pi}{2}</math>; <math>\cos \frac{6\pi}{5}</math>; <math>\cos(-2)</math>.</p>
	6. Определите промежутки возрастания функции $y = \sin \frac{x}{2}$
	7. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos 2x$
	8. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{tg} 3x$
	9. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$
	10. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
	<p>11. Найдите область определения и область значений функции:</p> <p>а) <math>y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)</math>; б) <math>y = -\cos x + 2</math>; в) <math>y = -\operatorname{ctg} x</math>.</p>
	<p>12. Найдите наименьший положительный период каждой из функций:</p> <p>а) <math>y = 5\operatorname{tg} \frac{x}{3} - 1</math>; б) <math>y = \cos x \sin 5x - \sin x \cos 5x</math>;</p> <p>в) <math>y = 2\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 - 1</math>.</p>
	<p>13. Определите главный период функции</p> <p><math>f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}</math>.</p>

	14. Определите главный период функции $f(x) = \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x$ .
	15. Постройте график функции: а) $y =  \sin x $ ; б) $y = \sin(\pi - x)$ ; в) $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ; г) $y = \sin  x $ ; д) $y =  \sin x - 0,5 $ ; е) $y = \sin x - 1$ .
	16. Постройте график функции: а) $y =  \cos x $ ; б) $y = \cos(\pi - x)$ ; в) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ ; г) $y = \cos  x $ ; д) $y = \cos x + 1$ ; е) $y =  \cos x + 0,5 $ .
	17. Постройте график функции: а) $y =  \operatorname{tg} x $ ; б) $y = \operatorname{tg}  x $ ; в) $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$ ; г) $y = \operatorname{tg} x - 1$ ; д) $y =  \operatorname{tg} x - 1 $ ; е) $y = \operatorname{tg} x \cos x$ .
	18. Постройте график функции: а) $y =  \operatorname{ctg} x $ ; б) $y = \operatorname{ctg}  x $ ; в) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$ ; г) $y = \operatorname{ctg}(\pi - x)$ ; д) $y = \operatorname{ctg} x + 1$ ; е) $y =  \operatorname{ctg} x + 1 $ .
Обратные тригонометрич еские функции	19. Вычислите значения аркфункций а) $\arcsin 1$ ; б) $\arcsin \frac{1}{2}$ ; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; г) $\arccos(-1)$ ; д) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; е) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ; ж) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ; з) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ .
	20. Вычислите значение выражений 1. $\arcsin 0$ 12. $\arcsin -\frac{1}{2} + \arccos 1$ 2. $\arccos 1$ 13. $\cos(\arccos 1)$ 3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ 14. $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 4. $\arccos 3$ 15. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$ 5. $\arcsin(-1)$ 16. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 17. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ 7. $\operatorname{arctg} 0$ 18. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ 8. $\operatorname{arctg} 1$ 19. $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$ 9. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ 10. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
	21. Найдите значение выражения: а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; б) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-1)$ ; в) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ .
	22. Вычислите: а) $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б) $3 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ ; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$ ;

Тригонометрические уравнения	г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3 \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .
	23. Упростите: $a) \sin \left( \arccos \frac{4}{5} \right) b) \cos \left( \arcsin \left( -\frac{4}{5} \right) \right) c) \operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{12}{13} \right)$ $d) \operatorname{ctg} \left( \operatorname{arctg} \left( -\frac{15}{14} \right) \right) e) \sin \left( \operatorname{arctg} \left( -\frac{4}{3} \right) \right) f) \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right)$
	24. Решите простейшие тригонометрические уравнения: <div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%;">1. <math>\sin t = 0</math></div> <div style="width: 50%;">8. <math>\cos t = 2</math></div> <div style="width: 50%;">2. <math>\operatorname{tg} t = 1</math></div> <div style="width: 50%;">9. <math>\operatorname{ctg} t - \sqrt{3} = 0</math></div> <div style="width: 50%;">3. <math>\cos t = 1</math></div> <div style="width: 50%;">10. <math>2 \sin t + 5 = 0</math></div> <div style="width: 50%;">4. <math>\sin t = -1</math></div> <div style="width: 50%;">11. <math>2 \cos t = \sqrt{2}</math></div> <div style="width: 50%;">5. <math>\operatorname{ctg} t = 0</math></div> <div style="width: 50%;">12. <math>2 \sin t + 1 = 0</math></div> <div style="width: 50%;">6. <math>\sin(-t) = 1</math></div> <div style="width: 50%;">13. <math>\cos \left( 2t + \frac{\pi}{4} \right) = 0</math></div> <div style="width: 50%;">7. <math>\cos(-t) = -1</math></div> </div>
	25. Решите уравнение (1—4). 1. а) $\sin x = -1$ ; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в) $\sin x = -\frac{1}{2}$ ; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 2. а) $\operatorname{tg} x = 1$ ; б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ ; в) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 3. а) $\sin x = -\frac{1}{7}$ ; б) $\cos x = \frac{1}{8}$ ; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ ; г) $\cos x = -\frac{\pi}{2}$ . 4. $2\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \sin x \cos x - \cos x - 2 = 0$ .
	26. а) $\sin \left( -\frac{x}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г) $\operatorname{ctg} \left( -\frac{x}{2} \right) = 1$ .
	27. а) $2 \cos \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$ ; б) $2 \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2}$ ; в) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = 3$ ; г) $\sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + 1 = 0$ .
	28. а) $\cos \left( \frac{\pi}{6} - 2x \right) = -1$ ; б) $2 \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{x}{4} \right) = \sqrt{3}$ ; в) $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = -1$ ; г) $2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - 3x \right) = \sqrt{2}$ .
	29. В7 Найдите корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ (в градусах). В ответе запишите корень принадлежащий промежутку $(270^\circ; 360^\circ)$ .
	30. В7 Найдите корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ (в градусах). В ответе запишите корень принадлежащий промежутку $(180^\circ; 270^\circ)$ .
	31. Найдите корень уравнения: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$ . В ответе запишите наибольший отрицательный корень.
	32. В5 Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(2x+5)}{6} = 0,5$ . В ответе напишите наименьший положительный корень.

33.	<b>B7</b> Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x-1)}{3} = \sqrt{3}$ . В ответе напишите наименьший положительный корень.
34.	Решите уравнение: а) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ; б) $-2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$ ; в) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = -1$ ; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 4x\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ .
35.	а) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б) $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = 1$ ; в) $\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}$ ; г) $\sin \frac{x}{3} \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
36.	Решите уравнения: а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ ; б) $3\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$ . а) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ ; б) $\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ . а) $\sin x = -0,6$ ; б) $\cos x = \frac{2}{3}$ ; в) $\operatorname{tg} x = -4$ .
37.	Решите уравнения: а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ ; б) $3\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ . а) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$ ; б) $\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ . а) $\cos x = -0,7$ ; б) $\sin x = \frac{1}{4}$ ; в) $\operatorname{tg} x = 5$ .
38.	Решите уравнение (1—5). 1. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 2. $\sin^2 x - 5\sin x - 6 = 0$ . 3. $3\cos^2 \pi x + 4\cos \pi x - 7 = 0$ . 4. $\operatorname{tg} x + \frac{4}{3\operatorname{tg} x + 2} + 5 = 0$ . 5. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - 9\operatorname{ctg} x - 9 = 0$ .
39.	Решите уравнение (1—5). 1. $2\sin^2 \pi x - \cos \pi x - 1 = 0$ . 2. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos 2x = 0,5$ . 3. $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$ . 4. $\cos(1,5\pi + 2x) - \cos x = 0$ . 5. $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
40.	Решите уравнение (1—4). 1. $2\sin x - 3\cos x = 0$ . 2. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 0$ . 3. $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ . 4. $2\cos^2 x + 4\sin x \cos x = -1$ .
41.	Решить однородные тригонометрические уравнения: а) $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$ ; б) $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$ ; в) $9\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$ ; г) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$ .

Тригонометрические неравенства	42.	Решите неравенства: а) $\sin x > -\frac{1}{2}$ ; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ .
	43.	а) $2 \cos x - 1 \geq 0$ ; б) $2 \sin x + \sqrt{2} \geq 0$ ; в) $2 \cos x - \sqrt{3} \leq 0$ ; г) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$ .
	44.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$ .
	45.	$\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$ ; б) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
	46.	а) $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ ; б) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$ ; в) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geq 1$ ; г) $2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$ .
	47.	а) $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$ ; б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$ ; в) $\operatorname{ctg} 3x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; г) $3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$ .
	48.	$2 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x > 2$ .
	49.	$4 \cos^2 x - (2\sqrt{2} - 2) \sin x > 4 - \sqrt{2}$ .
	50.	а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}$ ; б) $\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

## ЧАСТЬ 2.

Тригонометрические уравнения с отбором корней	51.	а) Решите уравнение: $\sin x + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$ б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; 2\pi\right]$ .
	52.	а) Решите уравнение $4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x = 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ .
	53.	а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5 = 0$ . б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .
	54.	а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{121}\right)^{\cos x} = 11^{2 \sin 2x}$ . б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .
	55.	а) Решите уравнение $\sin^2 x + \sin 2x = 1$ ; б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ .