

10.1 класс (тех)

2021-2022уч.год

Примерный банк заданий для подготовки к тестированию по математике
(учебник Никольский С.М., углублённый уровень)

Глава II: §10, п.п. 10.1 – 10.4; §11, п.п. 11.1 – 11.9

Модуль №5

"Тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения и неравенства"

ТЕМА	Обучающийся научится:	Получит возможность:
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.	Определять функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики, обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, их свойства и графики. Строить графики изучаемых функций; определять их промежутки возрастания и убывания; сравнивать значения функций	Читать графики тригонометрических функций, свойства функций по графикам, использовать графики тригонометрических функций для решения и для отбора корней тригонометрических уравнений и неравенств.
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	Решать простейшие тригонометрические уравнения: определять, какие уравнения называют простейшими тригонометрическими, выбирать приемы решения тригонометрических уравнений. Узнавать уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного. Применять основные тригонометрические формулы, формулы сложения и другие формулы для решения уравнений. Применять приемы понижения кратности угла и понижения степени уравнения. Определять, какое уравнение называют тригонометрическим однородным, узнавать и решать однородные уравнения. Решать простейшие неравенства для синуса и косинуса, для тангенса и котангенса. Выбирать способы решения тригонометрических неравенств; однородных тригонометрических уравнений и неравенств; неравенств, сводящихся к простейшим заменой переменного. Вводить вспомогательный угол. Использовать замену неизвестного $t = \sin x + \cos x$.	Решать любые тригонометрические уравнения; применяя метод замены неизвестного, основные тригонометрические формулы для решения уравнений; отбирать корни тригонометрических уравнений согласно заданным условиям различными способами. Решать неравенства, опираясь на графики, на единичную окружность; использовать знания для построения простейших математических моделей; решать неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)

ТЕМА	ВОПРОСЫ (ЗАДАНИЯ)
Тригонометрические функции	1. Сравните: а) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\sin \frac{3\pi}{7}$; б) $\sin \left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\sin \left(-\frac{3\pi}{8}\right)$; в) $\sin \frac{\pi}{15}$ и $\sin \left(-\frac{7\pi}{15}\right)$; г) $\sin \frac{3\pi}{5}$ и $\sin \frac{4\pi}{5}$; д) $\sin \frac{7\pi}{12}$ и $\sin \frac{11\pi}{12}$; е) $\sin \frac{8\pi}{9}$ и $\sin \frac{7\pi}{9}$.
	2. Сравните: а) $\cos \frac{3\pi}{7}$ и $\cos \frac{2\pi}{7}$; б) $\cos \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{2\pi}{7}\right)$; в) $\cos \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{5\pi}{8}$; г) $\cos \left(-\frac{5\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; д) $\cos \frac{13\pi}{12}$ и $\cos \frac{23\pi}{12}$; е) $\cos \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{5\pi}{9}$.
	3. Сравните: а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$; б) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{8}\right)$; в) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}$ и $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$; г) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{10}$ и $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{10}$; д) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12}$; е) $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)$.
	4. Сравните: а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$; б) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{ctg} \left(-\frac{6\pi}{7}\right)$; в) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$ и $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}$ и $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{10}$; д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{12}$; е) $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)$.
	5. Расположите в порядке возрастания числа: $\cos 1,5$; $\cos(-1,3)$; $\cos \frac{3\pi}{2}$; $\cos \frac{6\pi}{5}$; $\cos(-2)$.
	6. Определите промежутки возрастания функции $y = \sin \frac{x}{2}$
	7. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos 2x$
	8. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{tg} 3x$
	9. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$
	10. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
	11. Найдите область определения и область значений функции: а) $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; б) $y = -\cos x + 2$; в) $y = -\operatorname{ctg} x$.
	12. Найдите наименьший положительный период каждой из функций: а) $y = 5\operatorname{tg} \frac{x}{3} - 1$; б) $y = \cos x \sin 5x - \sin x \cos 5x$; в) $y = 2\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 - 1$.
	13. Определите главный период функции $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

	14. Определите главный период функции $f(x) = \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x$.
	15. Постройте график функции: а) $y = \sin x $; б) $y = \sin(\pi - x)$; в) $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; г) $y = \sin x $; д) $y = \sin x - 0,5 $; е) $y = \sin x - 1$.
	16. Постройте график функции: а) $y = \cos x $; б) $y = \cos(\pi - x)$; в) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$; г) $y = \cos x $; д) $y = \cos x + 1$; е) $y = \cos x + 0,5 $.
	17. Постройте график функции: а) $y = \operatorname{tg} x $; б) $y = \operatorname{tg} x $; в) $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$; г) $y = \operatorname{tg} x - 1$; д) $y = \operatorname{tg} x - 1 $; е) $y = \operatorname{tg} x \cos x$.
	18. Постройте график функции: а) $y = \operatorname{ctg} x $; б) $y = \operatorname{ctg} x $; в) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$; г) $y = \operatorname{ctg}(\pi - x)$; д) $y = \operatorname{ctg} x + 1$; е) $y = \operatorname{ctg} x + 1 $.
	19. Вычислите значения аркфункций а) $\arcsin 1$; б) $\arcsin \frac{1}{2}$; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arccos(-1)$; д) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; ж) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; з) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.
Обратные тригонометрич еские функции	20. Вычислите значение выражений 1. $\arcsin 0$ 12. $\arcsin -\frac{1}{2} + \arccos 1$ 2. $\arccos 1$ 13. $\cos(\arccos 1)$ 3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ 14. $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 4. $\arccos 3$ 15. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$ 5. $\arcsin(-1)$ 16. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 17. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ 7. $\operatorname{arctg} 0$ 18. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ 8. $\operatorname{arcctg} 1$ 19. $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$ 9. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ 10. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
	21. Найдите значение выражения: а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg}(-1)$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.
	22. Вычислите: а) $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $3 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$;

Тригонометрические уравнения	$\text{r) } \arcsin(-1) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$	
	23.	Упростите: $\text{a) } \sin \left(\arccos \frac{4}{5} \right) \text{ б) } \cos \left(\arcsin \left(-\frac{4}{5} \right) \right) \text{ в) } \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{12}{13} \right)$ $\text{г) } \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{15}{14} \right) \right) \text{ д) } \sin \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) \right) \text{ е) } \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right).$
	24.	Решите простейшие тригонометрические уравнения: $\begin{array}{ll} 1. \sin t = 0 & 8. \cos t = 2 \\ 2. \operatorname{tg} t = 1 & 9. \operatorname{ctg} t - \sqrt{3} = 0 \\ 3. \cos t = 1 & 10. 2 \sin t + 5 = 0 \\ 4. \sin t = -1 & 11. 2 \cos t = \sqrt{2} \\ 5. \operatorname{ctg} t = 0 & 12. 2 \sin t + 1 = 0 \\ 6. \sin(-t) = 1 & 13. \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ 7. \cos(-t) = -1 & \end{array}$
	25.	Решите уравнение (1—4). $\begin{array}{l} 1. \text{ а) } \sin x = -1; \text{ б) } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ в) } \sin x = -\frac{1}{2}; \text{ г) } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ 2. \text{ а) } \operatorname{tg} x = 1; \text{ б) } \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}; \text{ в) } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}. \\ 3. \text{ а) } \sin x = -\frac{1}{7}; \text{ б) } \cos x = \frac{1}{8}; \text{ в) } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}; \text{ г) } \cos x = -\frac{\pi}{2}. \\ 4. 2\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \sin x \cos x - \cos x - 2 = 0. \end{array}$
	26.	$\begin{array}{ll} \text{а) } \sin \left(-\frac{x}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; & \text{б) } \operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \text{в) } \cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; & \text{г) } \operatorname{ctg} \left(-\frac{x}{2} \right) = 1. \end{array}$
	27.	$\begin{array}{ll} \text{а) } 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}; & \text{б) } 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2}; \\ \text{в) } \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = 3; & \text{г) } \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + 1 = 0. \end{array}$
	28.	$\begin{array}{ll} \text{а) } \cos \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) = -1; & \text{б) } 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4} \right) = \sqrt{3}; \\ \text{в) } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = -1; & \text{г) } 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \sqrt{2}. \end{array}$
	29.	B7 Найдите корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ (в градусах). В ответе запишите корень принадлежащий промежутку $(270^\circ; 360^\circ)$.
	30.	B7 Найдите корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ (в градусах). В ответе запишите корень принадлежащий промежутку $(180^\circ; 270^\circ)$.
	31.	Найдите корень уравнения: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.
	32.	B5 Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(2x+5)}{6} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

33.	B7 Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x-1)}{3} = \sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.
34.	Решите уравнение: а) $2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$; б) $-2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) = 1$; в) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = -1$; г) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} - 4x \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
35.	а) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = 1$; в) $\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}$; г) $\sin \frac{x}{3} \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
36.	Решите уравнения: а) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$. а) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$; б) $\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$. а) $\sin x = -0,6$; б) $\cos x = \frac{2}{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -4$.
37.	Решите уравнения: а) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; б) $3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$. а) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$; б) $\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$. а) $\cos x = -0,7$; б) $\sin x = \frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg} x = 5$.
38.	Решите уравнение (1—5). 1. $\cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. $\sin^2 x - 5 \sin x - 6 = 0$. 3. $3 \cos^2 \pi x + 4 \cos \pi x - 7 = 0$. 4. $\operatorname{tg} x + \frac{4}{3 \operatorname{tg} x + 2} + 5 = 0$. 5. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - 9 \operatorname{ctg} x - 9 = 0$.
39.	Решите уравнение (1—5). 1. $2 \sin^2 \pi x - \cos \pi x - 1 = 0$. 2. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos 2x = 0,5$. 3. $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$. 4. $\cos(1,5\pi + 2x) - \cos x = 0$. 5. $\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) \cos x + \sin \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
40.	Решите уравнение (1—4). 1. $2 \sin x - 3 \cos x = 0$. 2. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 0$. 3. $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$. 4. $2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = -1$.
41.	Решить однородные тригонометрические уравнения: а) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$; б) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$; в) $9 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 2 \sin^2 x$; г) $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$.

Тригонометрические неравенства	42.	Решите неравенства: а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.
	43.	а) $2 \cos x - 1 \geq 0$; б) $2 \sin x + \sqrt{2} \geq 0$; в) $2 \cos x - \sqrt{3} \leq 0$; г) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$.
	44.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$.
	45.	$\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$; б) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
	46.	а) $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; б) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$; в) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geq 1$; г) $2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.
	47.	а) $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$; в) $\operatorname{ctg} 3x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$.
	48.	$2 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x > 2$.
	49.	$4 \cos^2 x - (2\sqrt{2} - 2) \sin x > 4 - \sqrt{2}$.
	50.	а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}$; б) $\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ЧАСТЬ 2.

Тригонометрические уравнения с отбором корней (аналог №13 профильного ЕГЭ)	51.	а) Решите уравнение: $\sin x + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$ б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; 2\pi\right]$.
	52.	а) Решите уравнение $4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x = 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
	53.	а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5 = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.
	54.	а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{121}\right)^{\cos x} = 11^{2 \sin 2x}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
	55.	а) Решите уравнение $\sin^2 x + \sin 2x = 1$; б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
	56.	а) Решите уравнение: $\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.