

11 класс, Математика

2017-2018 уч.год

Тема модуля «ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛЫ»

В тесте проверяются теоретическая и практическая части.

Учащиеся должны знать/понимать:

Понятие первообразной. Какую функцию называют первообразной для функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Свойства первообразных. Формулы первообразных элементарных функций.

Определение неопределенного интеграла, символику и обозначение неопределенного интеграла.

Что называют интегрированием функции. Определенный интеграл.

Символику и обозначение определенного интегралов.

Основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла.

Понятие и виды криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции.

Формула Ньютона - Лейбница. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах.

Уметь:

Находить первообразные и вычислять интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования. Вычислять определенные интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования.

Использовать основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла при решении задач.

Узнавать и строить криволинейные трапеции, распознавать их виды.

Строить в координатной плоскости фигуры, ограниченные графиками функций.

Вычислять площади криволинейных трапеций, фигур, ограниченных графиками заданных функций с помощью определенного интеграла, формулы Ньютона-Лейбница.

Находить площадь круга, объем тел вращения, работу, массу стержня переменной плотности, работу электрического заряда, давление жидкости на стенку, центр тяжести с помощью определенных интегралов.

Решать задачи с использованием первообразной и интеграла:

№	Элементы содержания задания	Ответ
Часть 1. (Каждое задание оценивается в 1 балл)		
1.	Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:	
	1. $F(x) = 3x^3 + 5x^2 + \operatorname{tg} x - 8$ и $f(x) = 9x^2 + 10x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;	
	2. $F(x) = 6x^5 + \ln 6x$ и $f(x) = 30x^4 + \frac{1}{x}, x > 0$.	
	3. $F(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ и $f(x) = 3x^2 + 8x - 5, x \in \mathbf{R}$;	
	4. $F(x) = 2x^5 + e^x$ и $f(x) = 10x^4 + e^x, x \in \mathbf{R}$.	
	5. $F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 9x + 15$ и $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 9 (x \in \mathbf{R})$;	
	6. $F(x) = \frac{3}{x^2} - 5x - \sin x - 10$ и $f(x) = -\frac{6}{x^3} - 5 - \cos x (x \neq 0)$.	
7. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4), f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$;		
2.	Укажите общий вид первообразных для функций:	

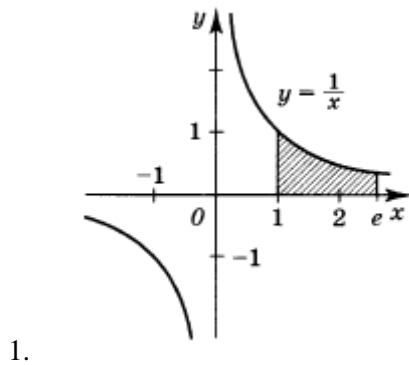
1.	$f(x) = x^4 + 3x.$ <ol style="list-style-type: none"> 1. $F(x) = \frac{x^5}{5} + 6x^2$ 2. $F(x) = 4x^3 + 3 + C$ 3. $F(x) = 4x^3 + 3$ 4. $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} + C$ 	
2.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + \sqrt{3}.$ <ol style="list-style-type: none"> 1. $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}$ 2. $F(x) = 3x^2 + 6x - 2 + C$ 3. $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + C$ 4. $F(x) = 3x^2 + 6x - 2$ 	
3.	<p>Найдите первообразную для функции $f(x) = x + \cos x$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$ 2. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$ 3. $F(x) = x^2 + \cos x + C$ 4. $F(x) = 2 - \cos x + C$ 	
4.	<p>Найдите первообразную для функции $f(x) = 3x^2 - \sin x$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $F(x) = x^3 - \cos x + C$ 2. $F(x) = 2x + \sin x + C$ 3. $F(x) = x^3 + \cos x + C$ 4. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$ 	
5.	<p>Найдите первообразную для функции $f(x) = e^x - x^3$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $F(x) = e^x - \frac{x^4}{4} + C$ 2. $F(x) = e^x - 3x^2 + C$ 3. $F(x) = e^{x-1} - 3e^2 + C$ 4. $F(x) = e^x - x^4 + C$ 	
6.	<p>Найдите первообразную для функции $f(x) = e^x + 12$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $F(x) = e^x + C$ 2. $F(x) = e^{x-1} + C$ 3. $F(x) = e^x + 12x + C$ 4. $F(x) = e^x + 12 + C$ 	
	Найдите общий вид первообразных и для заданной функции:	
3.	1. $y = \frac{5}{x} + \sin x, x \neq 0$	
	2. $y = 6 \cos x$	
	3. $y = \frac{7}{x^2}, x \neq 0$	
	4. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$	

	5.	$y = -13 \sin x + \frac{5}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2}, n \in Z$	
	6.	$y = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x} - 6^x, x \neq \pi, n \in Z$	
	7.	$y = \sqrt{2x} - x^5 + \frac{3}{x}, x \neq 0$	
	8.	$y = \sqrt[5]{x} - 2e^x$	
	9.	$y = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, x \neq \pi, n \in Z$	
	10.	$y = x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4}, x > 0$	
	Найдите общий вид первообразных для заданной функции:		
4.	1.	$y = e^{5x+2}$	
	2.	$y = \sin(4x-7)$	
	3.	$y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$	
	4.	$y = -\frac{1}{(6x+1)^2}$	
	5.	$y = \frac{1}{\sqrt{7x-9}}$	
	6.	$y = \sin^2 x + \cos^2 x$	
	7.	$y = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$	
	Для функции $f(x)$ найдите ту первообразную, которая проходит через точку $M(x;y)$		
5.	1.	$f(x) = 5e^x, M(0;14)$	
	2.	$f(x) = -9 \cos x, M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$	
	3.	$f(x) = -4x^3 + \frac{1}{x^2}, M(1;2)$	
	Найдите неопределенный интеграл:		
6.	1.	$\int \frac{-10}{\sqrt{5x-4}} dx$	
	2.	$\int (\cos 2x - \sin 3x) dx$	
	3.	$\int \sqrt{6-5x} dx$	
	Вычислить определенные интегралы:		
7.	1.	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{-5x+6}$	

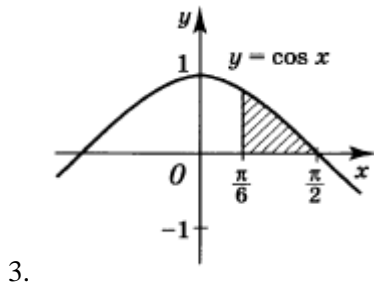
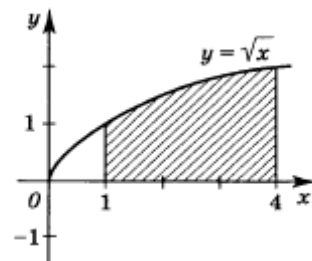
2.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	
3.	$\int_{-1}^2 x^4 dx$	
4.	$\int_2^8 2dx$	
5.	$\int_{-8}^0 \frac{3x}{4} dx$	
6.	$\int_0^e \frac{3dx}{x}$	
7.	$\int_{-1}^4 (x^2 - x + 4) dx$	
8.	$\int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx$	
9.	$\int_0^1 ((x-2)^3 + 3(x-1)^2) dx$	

Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры:

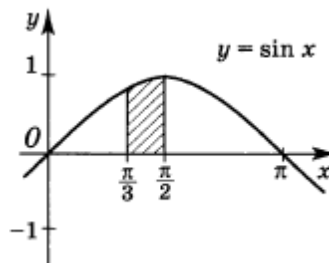
8.



2.



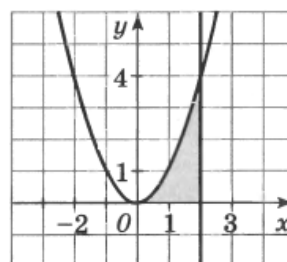
4.

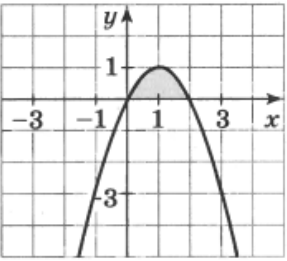
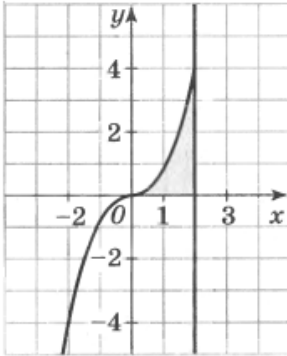
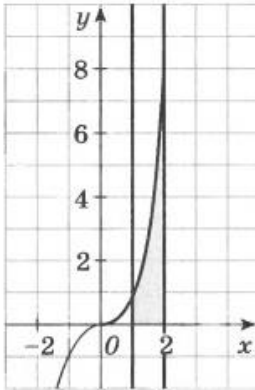
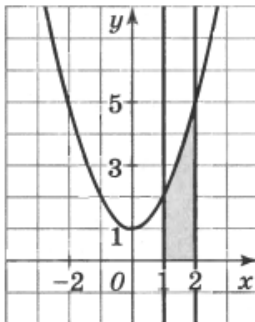
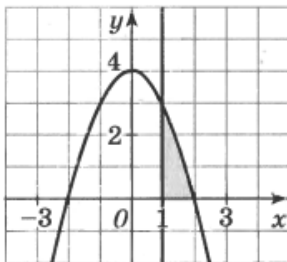


Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

9.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = 2$.
1. 2
 2. $2\frac{2}{3}$
 3. 4
 4. $2\frac{1}{3}$



2.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 1 2. $1\frac{2}{3}$ 3. $1\frac{1}{3}$ 4. $1\frac{1}{2}$ 	
3.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0,5x^3$, $y = 0$ и $x = 2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 2 2. 1,5 3. 2,5 4. 2,2 	
4.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 4 2. $3\frac{3}{4}$ 3. $4\frac{1}{4}$ 4. $2\frac{1}{4}$ 	
5.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 3 2. $3\frac{2}{3}$ 3. 3,5 4. $3\frac{1}{3}$ 	
6.	<p>Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$ и $x = 1$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $2\frac{1}{3}$ 2. $1\frac{2}{3}$ 3. $2\frac{2}{3}$ 4. $1\frac{1}{3}$ 	
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:		
10. 1.	$y = \cos x$, $y = 0,5$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$	
2.	$y = x^2$, $y = 9$	
3.	$y = -x^2 - 4x + 5$, $y = 5$	

	4.	$y = -x^2 + 4x, y = -x$	
	5.	$y = 4x^2, y = -12x$	
	6.	$y = 5 - x^2, y = x + 3$	
	7.	$y = 4 + x^2, y = 2 - x, x = -1, x = 1$	
	8.	$y = -x^2 - 4x + 5, y = 5$	
	9.	$y = x^3, y = 8, x = 1$	
11.	Найти первообразную для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, если $F(1) = 3$		
12.	Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, если $F(3) = \ln(3e)$		
Часть 2. (Каждое задание оценивается в 2 балла)			
	Вычислить определенные интегралы:		
1.	1.	$\int_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 2 \right) dx$	
	2.	$\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{8} - \sin \frac{x}{8} \right)^2 dx$	
	3.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sqrt[3]{9x^2 - 30x + 25} dx$	
	4.	$\int_1^3 (2x^2 + \lg x) dx + \int_1^3 (3x + \lg x) dx$	
	5.	$\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$	
	6.	$\int_{\frac{1}{4}}^2 f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3, & \text{если } x > 1 \end{cases}$	
	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:		
2.	1.	$y = x^2 - 6x + 7, y = -x^2 + 4x - 1$	
	2.	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 4$	
	3.	$y = x^3 + 5x^2, y = x^2 - 4x$	
3.	Найдите ту первообразную для заданной функции $f(x) = 12(3x - 1)^3$, график которой касается оси x		
4.	Некоторая первообразная функции $f(x) = 3 \cos 3x + 6 \sin 6x$ принимает в точке $x = \frac{\pi}{2}$ значение 6. Какое значение принимает та же первообразная в точке $x = \frac{\pi}{6}$		
5.	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y = 8 - 0,5x^2$, касательной к ней $y = 2x + 10$ и прямыми $x=0$ и $x=-3$		
6.	Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ординат, параболой $y = 2x - x^2$ и касательной к параболе, проведенной через точку $(2;0)$		

7.	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{1-3x}$, касательной к графику этой функции в точке $x_0 = -5$ и прямой $y = 0$	
8.	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2x + 1$ и графиком ее первообразной, проведенным через точку $K(-2;1)$	
9.	Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 6t^2 + t$, где t – время в секундах, v – скорость в метрах в секунду. Найти путь, пройденный телом за третью секунду.	
10.	Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $v(t) = 1 + 2t$, где t – время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t = 2$ координата точки равнялась 5.	

Часть 3. (Каждое задание оценивается в 3 балла)

1.	Прямая $y = ax + b$ касается каждой из двух парабол $y = x^2 + 5x + 7$ и $y = x^2 - x - 5$. Найдите значения a и b , координаты точки касания и площадь фигуры, ограниченной этими параболой и касающейся их прямой.	
2.	Ускорение движения точки по координатной прямой задано формулой $a(t) = 2(t + 1)^2$, где t – время движения. Найдите закон изменения скорости $v = v(t)$ и закон движения $s = s(t)$, если $v(0) = 1$, $s(0) = 1$	
3.	Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдите силу давления воды (плотность 1000 г/м^3), заполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющую размеры $0,5$ и $0,4$ м ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$)	
4.	Дан прямолинейный стержень длиной l . Он неоднороден, и его плотность в точке, удаленной от левого конца на x , $0 \leq x \leq l$, определяется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найдите массу стержня, если $\rho(x) = x^2 - x + 1$, $l = 6$	