11 класс, Математика
2018-2019 уч.год

Тема модуля «ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛЫ»

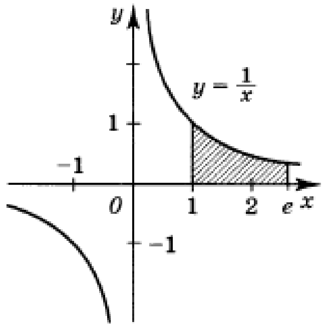
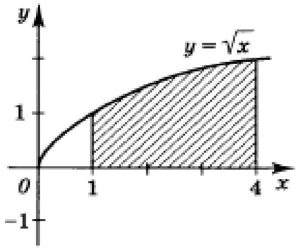
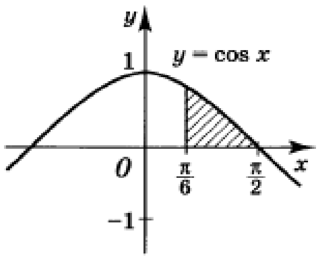
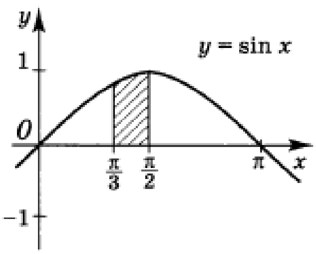
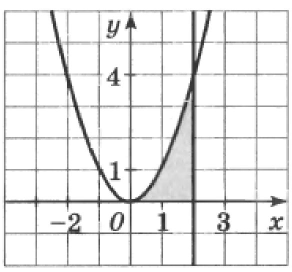
В тесте проверяются теоретическая и практическая части.

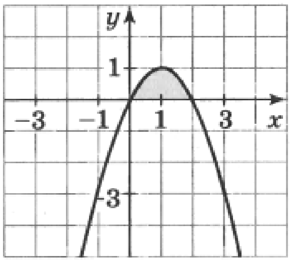
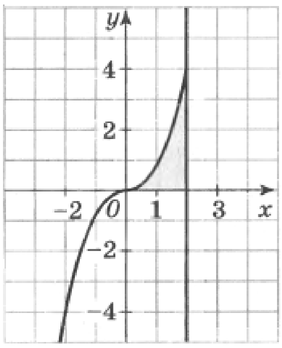
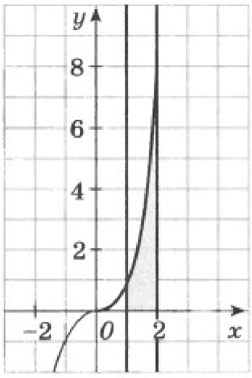
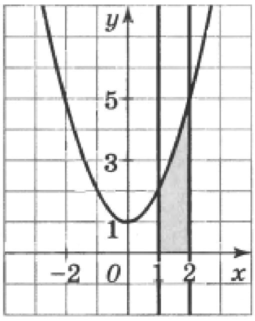
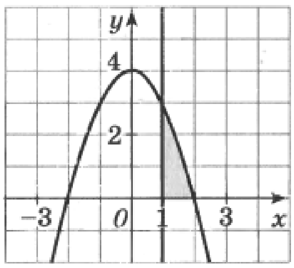
<u>Учащиеся должны знать/понимать:</u>
Понятие первообразной. Какую функцию называют первообразной для функции y = f(x) на интервале (a; b).
Свойства первообразных. Формулы первообразных элементарных функций.
Определение неопределенного интеграла, символику и обозначение неопределенного интеграла.
Что называют интегрированием функции. Определенный интеграл.
Символику и обозначение определенного интегралов.
Основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла.
Понятие и виды криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции.
Формула Ньютона - Лейбница.Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах.
<u>Уметь:</u>
Находить первообразные и вычислять интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования. Вычислять определенные интегралы элементарных функций с использованием формул, свойств и правил интегрирования.
Использовать основные свойства и геометрический смысл определенного интеграла при решении задач.
Узнавать и строить криволинейные трапеции, распознавать их виды.
Строить в координатной плоскости фигуры, ограниченные графиками функций.
Вычислять площади криволинейных трапеций, фигур, ограниченных графиками заданных функций с помощью определенного интеграла, формулы Ньютона-Лейбница.
Находить площадь круга, объем тел вращения, работу, массу стержня переменной плотности, работу электрического заряда, давление жидкости на стенку, центр тяжести с помощью определенных интегралов.
<u>Решать задачи с использованием первообразной и интеграла:</u>

№		*Элементы содержания задания*	*Ответ*
Часть 1.(*Каждое задание оценивается в 1 балл*)			
1.	Доказать, что функция F(x) является первообразной для функции f(x), если:		
	1.	$F(x)=3x^3+5x^2+\operatorname{tg}x-8$ и $f(x)=9x^2+10x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$;	
	2.	$F(x)=6x^5+\ln 6x$ и $f(x)=30x^4+\dfrac{1}{x},\ x>0.$	
	3.	$F(x)=x^3+4x^2-5x+7$ и $f(x)=3x^2+8x-5,\ x\in\boldsymbol{R}$;	
	4.	$F(x)=2x^5+e^x$ и $f(x)=10x^4+e^x,\ x\in\boldsymbol{R}.$	
	5.	$F(x)=\dfrac{3x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}-9x+15$ и $f(x)=3x^3+4x^2-9\ (x\in\boldsymbol{R})$;	
	6.	$F(x)=\dfrac{3}{x^2}-5x-\sin x-10$ и $f(x)=-\dfrac{6}{x^3}-5-\cos x\ (x\neq 0).$	
	7.	$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4),\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$;	
2.	Укажите общий вид первообразных для функций:		
	1.	$f(x)=x^4+3x.$ **1.** $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+6x^2$ **2.** $F(x)=4x^3+3+C$ **3.** $F(x)=4x^3+3$ **4.** $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{3x^2}{2}+C$	

	2.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + \sqrt{3}.$ **1.** $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}$ **2.** $F(x) = 3x^2 + 6x - 2 + C$ **3.** $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + C$ **4.** $F(x) = 3x^2 + 6x - 2$	
	3.	**Найдите первообразную для функции** $f(x) = x + \cos x$. **1.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$ **2.** $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$ **3.** $F(x) = x^2 + \cos x + C$ **4.** $F(x) = 2 - \cos x + C$	
	4.	**Найдите первообразную для функции** $f(x) = 3x^2 - \sin x$. **1.** $F(x) = x^3 - \cos x + C$ **2.** $F(x) = 2x + \sin x + C$ **3.** $F(x) = x^3 + \cos x + C$ **4.** $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$	
	5.	**Найдите первообразную для функции** $f(x) = e^x - x^3$. **1.** $F(x) = e^x - \frac{x^4}{4} + C$ **2.** $F(x) = e^x - 3x^2 + C$ **3.** $F(x) = e^{x-1} - 3e^2 + C$ **4.** $F(x) = e^x - x^4 + C$	
	6.	**Найдите первообразную для функции** $f(x) = e^x + 12$. **1.** $F(x) = e^x + C$ **2.** $F(x) = e^{x-1} + C$ **3.** $F(x) = e^x + 12x + C$ **4.** $F(x) = e^x + 12 + C$	
	Найдите общий вид первообразныхи для заданной функции:		
	1.	$y = \frac{5}{x} + \sin x,\ x \neq 0$	
	2.	$y = 6\cos x$	
	3.	$y = \frac{7}{x^2},\ x \neq 0$	
3.	4.	$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$	
	5.	$y = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x},\quad x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$	
	6.	$y = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x} - 6^x,\quad x \neq \pi n, n \in Z$	
	7.	$y = \sqrt{2x} - x^5 + \frac{3}{x},\quad x \neq 0$	
	8.	$y = \sqrt[5]{x} - 2e^x$	

	9.	$y=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$, $x \neq \pi n, n \in Z$	
	10.	$y=x^{\frac{3}{4}}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^4}$, $x \rhd 0$	
4.	Найдите общий вид первообразных для заданной функции:		
	1.	$y=e^{5x+2}$	
	2.	$y=\sin(4x-7)$	
	3.	$y=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$	
	4.	$y=-\dfrac{1}{(6x+1)^2}$	
	5.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{7x-9}}$	
	6.	$y=\sin^2 x+\cos^2 x$	
	7.	$y=2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$	
5.	Для функции *f(x)*найдите ту первообразную, которая проходит через точку *M(x;y)*		
	1.	$f(x)=5e^x$, $M(0;14)$	
	2.	$f(x)=-9\cos x$, $M\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$	
	3.	$f(x)=-4x^3+\dfrac{1}{x^2}$, $M(1;2)$	
6.	Найдите неопределенный интеграл:		
	1.	$\int\sqrt{2x-3}\,dx$;	
	2.	$\int\cos 3x\,dx$	
	3.	$\int\dfrac{-10}{\sqrt{5x-4}}dx$	
	4.	$\int(\cos 2x-\sin 3x)dx$	
	5.	$\int\sqrt{6-5x}\,dx$	
7.	Вычислить определенные интегралы:		
	1.	$\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{-5x+6}$	
	2.	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\cos^2 x}$	
	3.	$\int_{-1}^{2}x^4\,dx$	

	4.	$\int\limits_{2}^{8} 2dx$	
	5.	$\int\limits_{-8}^{0} \frac{3x}{4} dx$	
	6.	$\int\limits_{1}^{e} \frac{3dx}{x}$	
	7.	$\int\limits_{-1}^{4} \left(x^2 - x + 4\right) dx$	
	8.	$\int\limits_{1}^{2} x^2 dx + \int\limits_{2}^{3} x^2 dx$	
	9.	$\int\limits_{1}^{\sqrt{5}} x^3 \, dx + \int\limits_{\sqrt{5}}^{3} x^3 \, dx$	
	10.	$\int\limits_{0}^{1} \sin x \, dx + \int\limits_{1}^{\pi} \sin x \, dx$	
	11.	$\int\limits_{0}^{1} \left((x-2)^3 + 3(x-1)^2 \right) dx$	
8.	Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры:		
	 1.  2.		
	 3.  4.		
9.	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:		
	1.	**Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = 2$.** **1.** 2 **2.** $2\frac{2}{3}$ **3.** 4 **4.** $2\frac{1}{3}$ 	

	2.	**Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.** **1.** 1 **2.** $1\frac{2}{3}$ **3.** $1\frac{1}{3}$ **4.** $1\frac{1}{2}$ 	
	3.	**Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0{,}5x^3$, $y = 0$ и $x = 2$.** **1.** 2 **2.** 1,5 **3.** 2,5 **4.** 2,2 	
	4.	**Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.** **1.** 4 **2.** $3\frac{3}{4}$ **3.** $4\frac{1}{4}$ **4.** $2\frac{1}{4}$ 	
	5.	**Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.** **1.** 3 **2.** $3\frac{2}{3}$ **3.** 3,5 **4.** $3\frac{1}{3}$ 	
	6.	**Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$ и $x = 1$.** **1.** $2\frac{1}{3}$ **2.** $1\frac{2}{3}$ **3.** $2\frac{2}{3}$ **4.** $1\frac{1}{3}$ 	
	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:		
	1.	$y = \cos x,\ \ y = 0{,}5,\ \ x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$	
10.	2.	$y = x^2,\ \ y = 9$	
	3.	$y = -x^2 - 4x + 5,\ \ y = 5$	
	4.	$y = -x^2 + 4x,\ \ y = -x$	

	5.	$y=4x^2$, $y=-12x$	
	6.	$y=x^2-6x+11$ и $y=x+1$	
	7.	$y=5-x^2$, $y=x+3$	
	8.	$y=4+x^2$, $y=2-x$, $x=-1$, $x=1$	
	9.	$y=x^3$, $y=8$, $x=1$	
11.	Найти первообразную для функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$, если $F(1)=3$		
12.	Найти первообразную для функции $f(x)=\frac{1}{x}$, если $F(3)=ln(3e)$		
Часть 2. *(Каждое задание оценивается в 2 балла)*			
	Вычислить определенные интегралы:		
	1.	$\int_1^6\left(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}-2\right)dx$	
	2.	$\int_0^{2\pi}\left(cos\frac{x}{8}-sin\frac{x}{8}\right)^2dx$	
	3.	$\int_2^{23}5\sqrt[3]{9x^2-30x+25}\,dx$	
	4.	$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$	
	5.	$\int_{-3}^{2}\lvert 3\lvert x\rvert-3\rvert\,dx.$	
1.	6.	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 9x\cos 8x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 9x\sin 8x\,dx;$	
	7.	$\int_2^4(x^2+\ln x)\,dx-\int_2^4(x+\ln x)\,dx$	
	8.	$\int_1^3(2x^2+lg\,x)dx-\int_1^3(3x+lg\,x)dx$	
	9.	$\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$, где $f(x)=\begin{cases}x, \text{если } x\le 0\\ sinx, \text{если } x>0\end{cases}$	
	10.	$\int_{\frac{1}{4}}^{2}f(x)dx$, где $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, \text{если } 0\le x\le 1\\ x^3, \text{если } x>1\end{cases}$	
	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:		
	1.	$y=x^2-6x+7$, $y=-x^2+4x-1$	
2.	2.	$y=4-x^2$, $y=x^2-4$	
	3.	$y=x^3+5x^2$, $y=x^2-4x$	
3.	4.	$f(x)=x^3-3x^2$ и $g(x)=x^2-4x$	

4.	Найдите ту первообразную для заданной функции $f(x)=12(3x-1)^3$, график которой касается оси x	
5.	Некоторая первообразная функции $f(x)=3cos3x+6\,sin6x$ принимает в точке $x=\frac{\pi}{2}$ значение 6. Какое значение принимает та же первообразная в точке $x=\frac{\pi}{6}$	
6.	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y=8-0{,}5x^2$, касательной к ней $y=2x+10$ и прямыми $x=0$ и $x=-3$	
7.	Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ординат, параболой $y=2x-x^2$ и касательной к параболе, проведенной через точку *(2;0)*	
8.	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{1-3x}$, касательной к графику этой функции в точке $x_0=-5$ и прямой $y=0$	
9.	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+2x+1$ и графиком ее первообразной, проведенным через точку $K(-2;1)$	
10.	Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=6t^2+t$, где t – время в секундах, v – скорость в метрах в секунду. Найти путь, пройденный телом за третью секунду.	
11.	Точка движется покоординатной прямой, ее скорость задана формулой $v(t)=1+2t$,где t – время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t=2$ координата точки равнялась 5.	
Часть 3.*(Каждое задание оценивается в 3 балла)*		
1.	Прямая $y=ax+b$ касается каждой из двух парабол $y=x^2+5x+7$ и $y=x^2-x-5$. Найти значения а и b, координаты точки касания и площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой.	
2.	Ускорение движения точки по координатной прямой задано формулой $a(t)=2(t+1)^2$, где t – время движения. Найдите закон изменения скорости $v=v(t)$ и закон движения $s=s(t)$, если $v(0)=1$, $s(0)=1$	
3.	Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность 1000 г/м^3), заполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющую размеры 0,5 и 0,4 м (g= 9,8 м/с^2)	
4.	Дан прямолинейный стержень длиной l. Он неоднороден, и его плотность в точке, удаленной от левого конца на x, $0 \le x \le l$, определяется по формуле $\rho=\rho(x)$. Найдите массу стержня, если $\rho(x)=x^2-x+1$,l= 6	