

БАНК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САЙТА

МАТЕМАТИКА 11 класс

Тема: «УРАВНЕНИЯ и НЕРАВЕНСТВА»

Учащиеся должны знать/понимать:

Понятия равносильных преобразований уравнений, основные способы решения уравнений, понятие равносильности уравнений, шесть способов равносильных преобразований, преобразования уравнений, приводящие данное уравнение к уравнению, равносильному ему на \mathbb{R} , на некотором множестве чисел. Какое уравнение называют уравнением-следствием; основные способы преобразования, приводящие к уравнению-следствию: правила и алгоритм решения возведением уравнения в четную степень, потенцирование логарифмических уравнений, другие преобразования, приводящие к уравнению – следствию. Применение нескольких преобразований, приводящих к уравнению – следствию. Основные понятия равносильности уравнений, возведение уравнения в четную степень, умножение уравнения на функцию, другие преобразования и несколько преобразований уравнений, уравнения с дополнительными условиями на множествах. Метод промежутков для уравнений, содержащих модуль. Понятие параметра, уравнений с параметрами, основные подходы и методы в решении уравнений, содержащих параметры.

Понятия равносильных преобразований неравенств, основные способы решения неравенств, понятие равносильности неравенств, девять способов равносильных преобразований, преобразования неравенств, приводящие данное неравенство к неравенству, равносильному ему на \mathbb{R} , на некотором множестве чисел. Какое неравенство называют неравенством-следствием; основные способы преобразования, приводящие к неравенству-следствию: правила и алгоритм решения возведением неравенства в четную степень, потенцирование логарифмических неравенств, другие преобразования, приводящие к неравенству – следствию. Применение нескольких преобразований, приводящих к неравенству – следствию. Основные понятия равносильности неравенств, возведение неравенств в четную степень, умножение неравенств на функцию, другие преобразования и несколько преобразований неравенств, неравенства с дополнительными условиями на множествах. Метод промежутков для неравенств, содержащих модуль. Понятие неравенств с параметрами, основные подходы и методы в решении неравенств, содержащих параметры.

Уметь:

Выполнять равносильные преобразования при решении уравнений, правильно переходить к уравнению-следствию, определять и вычислять посторонние корни, выполнять проверку корней; решать уравнения вида $f(\alpha(x))=f(\beta(x))$ и находить способы их преобразования; выполнять равносильный переход на множестве, равносильные преобразования уравнений, другие преобразования при решении уравнений. Решать уравнения с модулем методом промежутков, находить особые точки находить способы их преобразования; решать уравнения, используя области существования функции, неотрицательность функции, ограниченность, определять характер функции при решении уравнений. Применять умножение на функцию при решении уравнений. Применять основные подходы и методы в решении уравнений с параметром.

Выполнять равносильные преобразования при решении неравенств, правильно переходить к неравенству - следствию, учитывать при решении неравенств область допустимых значений и ограничения на множествах; решать неравенства вида $f(\alpha(x)) \vee f(\beta(x))$ и находить способы их преобразования; выполнять равносильный переход на множестве, равносильные преобразования неравенств, другие преобразования при решении неравенств. Решать неравенства с модулем методом промежутков, находить способы их преобразования; решать неравенства, используя области существования функции, неотрицательность функции, ограниченность, определять характер функции при решении неравенств. Применять умножение на функцию при решении неравенств. Применять основные подходы и методы в решении неравенств с параметром.

Решать задачи с использованием первообразной и интеграла:

№	Элементы содержания задания	Ответ
Решите уравнения:		
1.	$\sqrt[3]{2x^2 - 24x - x^3} = 2 - x.$	
2.	$(2x - 3)^7 = (x + 3)^7.$	
3.	$9^{2x^2 - 3x} = 9^{x+6}.$	
4.	$2^{x+5} = 3^x.$	
5.	$\sqrt{x-1} = x-3$	
6.	$\sqrt{2x^2 - x - 5} + x = 1.$	

7.	$\sqrt[10]{x^2 - 4x - 5} = \sqrt[10]{2x^2 - 7x - 9}.$	
8.	$x^2 - 6x + \sqrt[6]{x - 3} = \sqrt[6]{x - 3} - 8.$	
9.	$\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 6} = \sqrt{6x + 13}.$	
10.	$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 5} = \sqrt{6x + 6}.$	
11.	$\frac{x^2 + 2x}{x + 3} = \frac{x + 6}{x + 3}.$	
12.	$\lg(x^4 + 2x^2 - 4) = \lg(x^4 + 6x - 8).$	
13.	$2^{\log_2(x-1)} = x^2 + 2x - 7.$	
14.	$\log_3(2x - 3) + \log_3(x - 12) = 2 \log_3(x - 6).$	
15.	$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x.$	
16.	$\arcsin(5 - 4x) = \arcsin x^2.$	
17.	$\arccos(x + 2) = \arccos x^2.$	
18.	$\arcsin(x^2 - 80,5) = \arcsin(x - 8,5).$	
19.	$\operatorname{arcctg}(x^2 - 5) = \operatorname{arcctg}(5x + 9).$	
20.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} - (\sin x)^{2007} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin^2 x} - (\sin x)^{4014}.$	
21.	<p>Пусть x_0 — корень уравнения</p> $\log_3(x - 1) + \log_3(x - 3) = 1.$ <p>Найдите значение выражения $2x_0 + 3$.</p>	
22.	<p>Найдите значение выражения $x_0 \cdot \frac{6}{\pi}$, если x_0 — наименьший положительный корень уравнения</p> $2 \cos x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x} + 1 - \operatorname{ctg}^2 x.$	
23.	<p>Найдите значение выражения $\frac{x_0}{\pi}$, если x_0 — наименьший положительный корень уравнения</p> $3 \sin x + 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 3.$	
24.	<p>Найдите значение выражения $\frac{x_0}{\pi}$, если x_0 — наименьший положительный корень уравнения</p> $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x + \cos x - 1.$	
25.	<p>Сколько корней имеет уравнение</p> $(\sin x + \cos x)^2 \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0?$	

26.	Сколько корней имеет уравнение $\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0?$	
27.	Сколько корней имеет уравнение $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0?$	
28.	Найдите среднее арифметическое корней уравнения $x^3 - 3x^2 + 3 + \frac{5}{x-3} = x - \frac{5}{3-x}.$	
29.	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\log_2 (x^2 - 7x + 13) \cdot \log_{x-2} 2 = 1.$	
30.	$\log_{0,2} (x^2 - 2) + \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 2} = \log_{0,2} (2x + 1) + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x + 1}.$	
31.	Найдите все корни уравнения $\cos 4x + \cos 2x - \operatorname{ctg} x \sin 2x = 0,$ принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.	
32.	Найдите все корни уравнения $\sin^2 (\pi - 6\pi x) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi x\right) = \frac{\sin (\pi - 2\pi x)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x\right)} + \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \pi x,$ принадлежащие отрезку $[1; 3]$.	
Решите уравнения:		
33.	$\sqrt{x} = \sqrt[3]{2x - 1}.$	
34.	$\frac{\operatorname{tg} \pi x}{\lg \left(x + \frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\lg \left(x + \frac{3}{4}\right)}.$	
35.	$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{3}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$	
36.	$5^{\log_5 (x+1)} = x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$	
37.	$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos x.$	
38.	$\log_x (16x^2 - 1) = \log_x (x^6 - 1).$	
39.	$\lg (3 - x) + 3 \sqrt{\frac{x-1}{x-4}} - \sqrt{\frac{x-4}{x-1}} = \frac{5}{\sqrt{(x-4)(x-1)}} + \lg (3 - x).$	
40.	Найдите произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения $ x - 3 + 2 x + 1 = 4.$	

41.	Решите уравнение: $\sqrt{\sqrt{ x -1} + \frac{3}{4}} + \frac{7}{4} = x.$	
42.	Решите уравнение: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6} + 6} = x.$	
43.	Решите уравнение: $x^3 - 24 = \sqrt[3]{x+24}.$	
44.	Решите уравнение: $7\sqrt[3]{7x-6} = x^3 + 6.$	
45.	Решите уравнение: $\sqrt{x^2 - 5x - 14} + \log_{0.6}(x^2 - 14x + 50) = 0.$	
46.	Решите уравнение: $ x-3 + x+3 = 8.$	
47.	Решите уравнение: $\sin x = \sin x \cos x.$	
48.	Решите уравнение: $ x^2 - 4 + x^2 - 9 = 2x + 11.$	
49.	Решите уравнение: $ x^2 - x - 6 + x^2 - 6x + 5 = 2x^2 - 7x - 1.$	
50.	Решите уравнение: $\sqrt[3]{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}.$	
51.	Найдите утроенное произведение корней уравнения $ x-3 ^{3x^2-10x+3} = 1.$	
52.	Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4.$	
53.	Пусть x_0 — корень уравнения $\sqrt{2x-8} = \lg(1 + \sqrt{4-x}).$ Найдите значение выражения $x_0^2 - 2x_0.$	
54.	Решите уравнение $\frac{4}{\pi} \arcsin(x-1) = 2 + \sqrt{x^2 - x - 2}.$	
55.	Решите уравнение $\frac{2}{\pi} \arcsin(3+x) = 1 + (x^2 + 3x + 2)^6.$	
56.	Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos x + \sin \frac{x}{4} = 2.$	
57.	Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2.$	
58.	Для каждого значения параметра a решить уравнение: $\frac{a-3-ax}{ax+1} = 3.$	
59.	Для каждого значения параметра a решить уравнение:	

	$\frac{ax}{x-3} + \frac{x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}.$	
60.	Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3-x} = a-x$ имеет единственный корень	
Решите неравенства:		
61.	$\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 4x - 5} < x - 2.$	
62.	$(x+1)^{15} < (x^2 - 2x - 3)^{15}.$	
63.	$\sqrt[3]{2x^2 - 8x + 15} < \sqrt[3]{x^2 - 3x + 21}.$	
64.	$\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} < \left(\frac{2}{7}\right)^{1-3x}.$	
65.	$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2}.$	
66.	$11^{\cos 2x} > 11^{1-2\cos^2 x}.$	
67.	$2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x^2-2x+5}}.$	
68.	$3^{\log_3(x+5)} < 2.$	
69.	$\sqrt{3x+1} < 2x-1.$	
70.	$2\sqrt{x+7} > x+1.$	
71.	$\sqrt[4]{x^2-5} < \sqrt[4]{5x+9}.$	
72.	$\log_{0,1}(x^3 + 2x^2 - 2x) > \log_{0,1}(x^3 + 4).$	
73.	$\log_2(x-7) > \log_2(8-x).$	
74.	$\log_{0,2}(x-3) + 2 \geq 0.$	
75.	$x^2 - 2x + \sqrt{\sin x} < 3x - 4 + \sqrt{\sin x}.$	
76.	$\frac{\sin x}{\lg(x+1)} > 0.$	
77.	$\sqrt[10]{x+1} < \sqrt[10]{ 1-2x-x }.$	
78.	$\arccos(x-2) > \arccos(3-x).$	
79.	$\sqrt[4]{3x-2} + \log_7(3x-2) + 3^{\frac{3x-2}{4}} > \sqrt[4]{3-2x} + \log_7(3-2x) + 3^{\frac{3-2x}{4}}$	
80.	$(\pi-3)^{x-5} - \sqrt[3]{x-5} > (\pi-3)^{\frac{x-9}{2}} - \sqrt[3]{\frac{x-9}{2}}.$	
81.	$\sqrt{x} < \sqrt[4]{2x+3}.$	
82.	$\sqrt{2x+1} > \sqrt[3]{7x-1}.$	
83.	$\frac{x^2}{1-\cos \pi x} < \frac{3-2x}{1-\cos \pi x}.$	

84.	$\frac{2 \sin x}{\sqrt{18-3x-x^2}} > \frac{1}{\sqrt{18-3x-x^2}}.$	
85.	$\log_2^2 x < \frac{1}{\log_x 2}.$	
86.	$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x < 2 \sin x.$	
87.	$\log_x(x+3) > \log_x(2x+1).$	
88.	$\log_2(x+1) + \log_2(x+4) + \sqrt{1-x^2} < 2 + \sqrt{1-x^2}.$	
89.	$(\sqrt{x^2-16}+1) \log_3(x^2-7) - \left(\frac{x}{2} + \sqrt{16-x^2}+3\right) < 0.$	
90.	$3 + x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} \leq 3 \sin x.$	
91.	$5 \sin^7 x + 2 \cos^{11} 4x \geq 7.$	
92.	Найдите значение выражения $(x_0 + 1)(x_0^2 + 2)$, если x_0 — наибольшее целое решение неравенства $\frac{3 \cdot 2^x - 48}{x^2 - 6x + 9} < 0.$	
93.	Найдите количество целых чисел — решений неравенства $\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{3x+17}} < 9^2$ из промежутка $[-8; -1).$	
94.	Найдите сумму целых чисел — решений неравенства $\sqrt{x+4} \cdot (2x+5) \geq 0,$ удовлетворяющих условию $x \leq 4.$	
95.	$\cos x \leq 1 + 3^x.$	
96.	$\cos x < x^2 + 1.$	
97.	$ x+1 + 2x+4 < 7.$	
98.	$ x^2 - 3x - 5 > x^2 - 2x - 2 .$	
99.	Найти все решения неравенства $ x^2 - 5x - 2 < 2x - 2,$ удовлетворяющие условию $x < 5.$	
100.	$ \log_2 x - 1 > (4 - 8x)(\log_2 x - 1).$	
101.	$ e^x - 1 > (3x + 2)(e^x - 1).$	
102.	Найдите наибольшее целое решение неравенства $3 x-3 + x+1 - 5-2x \leq \sqrt{5}-3 + \sqrt{5}+1 .$	
103.	Для каждого значения параметра a решить неравенство: $\sqrt{3-x} < \sqrt{x-a}.$	
104.	При каждом значении параметра a решите неравенство: $\log_a(8-x) < 2 \log_a(x-2).$	
105.	Для каждого значения параметра a решить неравенство: $\ln(x-a) + \sqrt{2a-x} \geq \sqrt{x-1} + \ln(x-a).$	